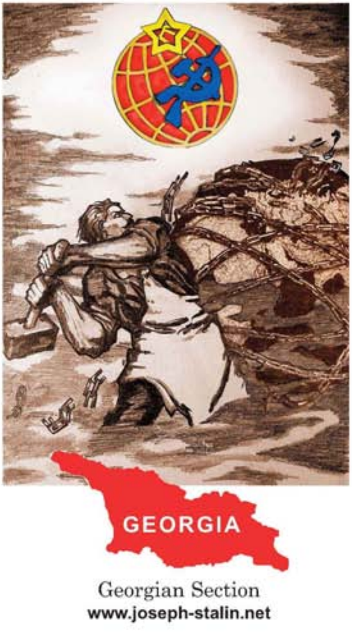
Karl Marx, Friedrich Engels, Vladimir Lenin, Joseph Stalin, Enver Hoxha

5 Classics of Marxism

Comintern (Stalinist-Hoxhaists)
http://ciml.250x.com



Georgian Section
www.joseph-stalin.net

SHMG Press – 2012
Karl Marx Press of the Georgian section of
Comintern (SH) – Stalinist-Hoxhaists Movement of Georgia

კ. მარქსი

მათემატიკური ხელნაწერები

სახელგამი
პოლიტლიტერატურის სექტორი
1948

პროლეტარებო ყველა ქვეყნისა, შეერთდით!

საქ. კ. პ. (ბ) ც. კ-თან არსებული მარქს-ენგელს-ლენინის
ინსტიტუტის საქართველოს ფილიალი

კ. მარქსი

მათემატიკური ხელნაწერები

თარგმანი და გამოკვლევა
ლ. გოკიელისა

სახელგამი * პოლიტლიტერატურის სექტორი
1947

მარქს-ენგელს-ლენინის ინსტიტუტის საქართველოს ფილიალისაგან

კარლ მარქსის სამეცნიერო მემკვიდრეობის მნიშვნელოვან ნაწილს წარმოადგენს მათემატიკის, განსაკუთრებით მისი დაფუძნების, საკითხებისადმი მიძღვნილი ნაწერები. მარქსის მეცნიერულ შემოქმედებაში და მის მეცნიერულ ინტერესების უფართოეს ასპარეზზე მათემატიკას საკმაოდ დიდი ადგილი უკავია.

მარქსის მათემატიკური ხელნაწერები წარმოადგენენ საყურადღებო წყაროს საზოგადოთ მარქსისტული ფილოსოფიისათვის და მათ მნიშვნელოვანი დახმარების გაწევა შეუძლიათ მარქსისტულ თეორიის მომარჯვებისათვის. მარქსის მათემატიკურ კონცეპციას დაუფასებელი და სახელმძღვანელო მნიშვნელობა აქვს მთელი მათემატიკური მეცნიერების და მათემატიკური კვლევა-ძიების გასწვრივ დიალექტიკური მატერიალიზმის მსოფლმხედველობის და მეთოდოლოგიის თანმიმდევრულად გატარებისათვის, მათემატიკის საფუძვლების შესახებ სწორი თვალსაზრისის შემუშავებისათვის, თანამედროვე მათემატიკის დაფუძნების პრობლემების მოგვარებისათვის.

ხელთნაწერები შეიცავს სხვადასხვა ხასიათის მასალას. ცენტრალური ადგილი იმ ნაწილებს უკავიათ, რომელნიც მათემატიკური ანალიზის საფუძვლების პრობლემატიკას შეეხება; ისინი სპეციალურად გაფორმებული იყო მარქსის მიერ ენგელსისათვის გასაცნობად.

მარქსის მათემატიკური ნაშრომების გამოქვეყნება შესაძლებელი გახდა მხოლოდ საბჭოთა სინამდვილის პირობებში. 1933 წელს ჟურნალის „Под знаменем марксизма" იანვარ-თებერვლის ნომერში დაიბეჭდა ხელნაწერების ნაწილი, რომელიც შეიცავს ენგელსისათვის გადაცემულ მასალას.

ტექსტს არ მიუღია საბოლოო ლიტერატურული რედაქცია. ის შედგენილია, ძირითადათ, გერმანულ ენაზე, მაგრამ, აზრის სათანადო კოლორიტით გადმოცემის მიზნით, მარქსი, როგორც ეს მას საერთოდ სჩვევია, ზოგჯერ სხვა ენის სიტყვებსაც იყენებს და იმგვარ სიტყვებსაც ვხვდებით, რომელნიც ერთგვარ თავისუფალ კომპოზიციას წარმოადგენს სხვადასხვა ენების სიტყვებისაგან. ამასთან ერთად თუ გავითვალისწინებთ, საზოგადოთ, მარქსის ბრწყინვალე, აზრობრივი ნიუანსების და მხატვრული ფორმის მხრივ განსაკუთრებით მდიდარ მეტყველებას, რამაც მის მათემატიკურ ნაწერებშიც ჰპოვა სრული გამოვლინება და უკანასკნელის სტილი დიდათ განასხვავა მათემატიკური მასალის გადაცემის ჩვეულებრივი შტამპისაგან, ადვილათ დასანახი იქნება თუ როგორი სიძნელეები დგას მარქსის მათემატიკური ნაწერების სხვა ენაზე ადექვატურად გადმოცემის ამოცანის წინაშე.

მარქსის მათემატიკურ ხელნაწერების ზემოთდასახელებულ ნაწილის ქართული თარგმანი, ხელნაწერების ფოტოასლების საფუძველზე, შესრულებულია პროფ. ლ. გოკიელის მიერ. მასვე ეკუთვნის გამოკვლევა მარქსის მათემატიკური კონცეპციის შესახებ, რომელიც წინამდებარე თარგმანს თან ერთვის.

I

წარმოებული და სიმბოლური დიფერენციალური კოეფიციენტი[1]

უმარტივეს ფუნქციების ალგებრული დიფერენცირება

I

ვთქვათ დამოუკიდებელი x ცვლადი იზრდება x_1-მდე და მაშასადამე დამოკიდებული y ცვლადი — y_1-მდე.

განვიხილოთ აქ sub I) უმარტივესი შემთხვევა, როცა x მონაწილეობს მხოლოდ პირველ ხარისხში.

1) $y = ax$; თუ x იზრდება x_1-მდე, მაშინ $y_1 = ax_1$ და:

$$y_1 - y = a(x_1 - x).$$

ჩვენ ეხლა რომ მოგვეხდინა დიფერენციალური ოპერაცია ე. ი. x_1-თვის მიგვეცა საშუალება შემცირებულიყო x-მდე, მივიღებდით: $x_1 = x$; $x_1 - x = 0$, მაშასადამე, $a(x_1 - x) = a \cdot 0 = 0$. შემდეგ, რადგან y გაიზარდა y_1-მდე მხოლოდ იმის გამო, რომ x გაიზარდა x_1-მდე, ჩვენ ამგვარადვე გვექნებოდა:

$$y_1 = y, \quad y_1 - y = 0.$$

ამგვარად

$$y_1 - y = a(x_1 - x) \text{ გადაიქცეოდა } 0 = 0\text{-ად.}$$

ჯერ დადგენა სხვაობის და შემდეგ მისი კვლავ მოხსნა მიგვიყვანს ამგვარად პირდაპირ **არაფრისაკენ**. დიფერენციალურ ოპე-

[1] განყოფილებათა და წერილების სათაურები და აგრეთვე შენიშვნები ეკუთვნის რუსული თარგმნის რედაქციას. ისინი დატოვებულ არიან ქართულ თარგმანშიაც.

რაციის გაგების მთელი სიძნელე (როგორც საერთოდ ყოველგვარი უარყოფის უარყოფისა) სწორედ იმაში მდგომარეობს, რომ დავინახოთ რითი განსხვავდება ის ასეთი მარტივი პროცედურისაგან და როგორ მიგვიყვანს ამიტომ ნამდვილ შედეგამდე. თუ ჩვენ გავყოფთ $a(x_1 - x)$, შესაბამისად ტოლობის მარცხენა მხარესაც, $x_1 - x$-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a.$$

რადგან y არის დამოკიდებული ცვლადი, ამიტომ მას არ შეუძლია შეასრულოს რაიმე დამოუკიდებელი მოძრაობა. ამიტომ y_1-ს არ შეუძლია გახდეს $= y$ და, მაშასადამე, $y_1 - y$ გახდეს $= 0$ უიმისოდ, რომ მანამდე x_1 არ გახდეს $= x$.

მეორე მხრით, ჩვენ დავინახეთ, რომ x_1 არ შეიძლება გამხდარიყო $= x$ ფუნქციაში $a(x_1 - x)$ უკანასკნელის ნულის გაუტოლებლად. ამიტომ მამრავლი $x_1 - x$ აუცილებლად იყო სასრული სხვაობა იმ მომენტში, როცა ჩვენ გავყავით მასზე ტოლობის ორივე მხარე. ამგვარად, შეფარდების $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ შედგენის მომენტში $x_1 - x$ ყოველთვის წარმოადგენს სასრულო სხვაობას და, მაშასადამე, $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ სასრულო სხვაობათა შეფარდებას; ამის შესაბამისად

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

ამგვარად,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ანუ } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a,$$

სადაც მუდმივი a წარმოგვიდგება როგორც ორივე ცვლადთა სასრულო სხვაობების შეფარდების ზღვარითი მნიშვნელობა (Grenzwert) [1].

---

[1] მარქსი ხმარობს ამ შრომაში ტერმინს Grenzwert (თარგმანში: ზღვარითი მნიშვნელობა) თანამედროვე გაგებისაგან განსხვავებით. ასე, თუ რაიმე სიდიდე ყველა თავის ცვალებისას რჩება რაიმე გამოსახულების ტოლი, რომელიც უცვლელ ფორმას ინარჩუნებს, მარქსი განიხილავს ამ უკანასკნელს, როგორც აღებულ სიდიდის ცვალებათა ზღვარით მნიშვნელობას. თანამედროვე სიტყვახმარებისაგან განსხვავებით ის იყენებს ტერმინებსაც: მინიმალური სიდიდე (Minimalgrösse), მინიმალური გამოსახულება (Minimalausdruck) და მინიმალური მნიშვნელობა (Minimalwert).

რადგან a მუდმივია, მან არ შეიძლება რაიმე ცვლილება განიცადოს, და, მაშასადამე, ასევე გვექნება განტოლების მ ა რ ჯ ვ ე ნ ა მ ხ ა რ ი ს ა თ ვ ი ს, რომელიც მასზე მიყვანილია. ასეთ პირობებში დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი პ რ ო ც ე ს ი მიმდინარეობს მარცხენა მხარეზე $\frac{y_1-y}{x_1-x}$ ანუ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. ეს არის თავისებურება ისეთი მარტივი ფუნქციების, როგორც ax.

ვთქვათ შეფარდების მნიშვნელში x_1 კლებულობს, x-კენ მიახლოვებით. მისი კლების საზღვარი (Grenze) მიღწეული იქნება, როგორც კი ის გადიქცევა x-ად. ამით სხვაობა x_1-x გადიქცევა $=x-x=0$ და ამიტომ აგრეთვე $y_1-y=y-y=0$. ჩვენ მივიღებთ ამგვარად:

$$\frac{0}{0}=a.$$

რადგან გამოსახულებაში $\frac{0}{0}$ გაქრა ყოველგვარი კვალი მისი წარმოშობის და მნიშვნელობისა, ჩვენ მას ვცვლით $\frac{dy}{dx}$-ით, სადაც სასრული სხვაობები x_1-x ანუ Δx და y_1-y ანუ Δy წარმოგვიდგებიან სიმბოლიზირებულები, როგორც მ ო ხ ს ნ ი ლ ი ანუ გ ა მ ქ რ ა ლ ი სხვაობანი; ანუ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ გადაიქცევა $\frac{dy}{dx}$. ამგვარად:

$$\frac{dy}{dx}=a.$$

ნუგეში, რომელსაც მაგრად ეჭიდება ზოგიერთი მარაციონალიზებელი (rationalisierende) მათემატიკოსი, სახელდობრ, რომ, ვითომც, რაოდენობრივად $\frac{dy}{dx}$ არის ნამდვილად მხოლოდ უსასრულოდ მცირეთა შეფარდება, მხოლოდ მიახლოვებით არის $\frac{0}{0}$, წარმოადგენს ქიმერას, როგორც ეს უფრო ნათლად ნაჩვენები იქნება sub II)-ში.

შეიძლება კიდევ აღინიშნოს, როგორც განსახილველ შემთხვევის განსაკუთრებულობა, ის გარემოება, რომ როგორც $\frac{\Delta y}{\Delta x}=a$, აგრეთვე $\frac{dy}{dx}=a$ ე. ი. სასრულო სხვაობათა [შეფარდების] ზღვარითი

მნიშვნელობა არის იმავე დროს ზღვარითი მნიშვნელობა დიფერენციალების [შეფარდებისაც].

2) იმავე შემთხვევის მეორე მაგალითად შეიძლება გამოგვადგეს

$$\begin{matrix} y = x\,, \\ y_1 = x_1; \end{matrix} \quad y_1 - y = x_1 - x; \quad \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ანუ } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1; \quad \frac{0}{0} \text{ ანუ } \frac{dy}{dx} = 1.$$

II

რადგან $y = f(x)$, x-ის ფუნქცია კი მისი გაშლილი ალგებრული გამოსახულებით მოთავსებულია განტოლების მარჯვენა მხარეზე, ჩვენ ვუწოდებთ ამ გამოსახულებას x-ის პირველად ფუნქციას (Originalfunktion), მის პირველ, დიფერენციაციით მიღებულ, მოდიფიკაციას — წინასწარ «წარმოებულ» ფუნქციას x-სა, ხოლო საბოლოო სახეს, რომელსაც ის მიიღებს დიფერენციალური პროცესის შედეგად — x-ის «წარმოებულ» ფუნქციას.

1) $y = ax^3 + bx^2 + cx - e$. თუ x იზრდება x_1-მდე,

$$y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 - e,$$
$$y_1 - y = a(x_1^3 - x^3) + b(x_1^2 - x^2) + c(x_1 - x) =$$
$$= a(x_1 - x)(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b(x_1 - x)(x_1 + x) + c(x_1 - x).$$

აქედან:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ანუ } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b(x_1 + x) + c.$$

წინასწარი «წარმოებული» $a(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b(x_1 + x) + c$ არის აქ სასრულო სხვაობათა შეფარდების ზღვარითი მნიშვნელობა ე. ი. როგორი მცირეც არ უნდა ავიღოთ ჩვენ ეს სხვაობანი, მნიშვნელობა $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ მოცემული იქნება ამ «წარმოებულით». მაგრამ, ის არ დაემთხვევა როგორც sub I) დიფერენციალების შეფარდების ზღვარითი მნიშვნელობას [1].

---

[1] სიტყვების შემდეგ: «მაგრამ ის არ დაემთხვევა როგორც sub I) დიფერენციალების შეფარდების ზღვარითი მნიშვნელობას» შავში: «მეორე მხრით, დიფერენციალური პროცესი წარმოებს ეხლა x-ის ფუნქციის წინასწარ «წარმოებულში» (მარჯვენა მხარეზე), ხოლო ამ მოძრაობას აუცილებლად თან ახლავს იგივე [დიფერენციალური] პროცესი მარცხენა მხარეზე».

თუ ფუნქციაში $a(x_1^2+x_1x+x^2)+b(x_1+x)+c$ ცვლადი x_1 კლებულობს და აღწევს თავის კლების *საზღვარს* (Grenze) ე. ი. ხდება x-ის *ტოლი*, x_1^2 გადაიქცევა x^2-ად, x_1x-იც x^2-ად და x_1+x $2x$-ად, და ჩვენ მივიღებთ x-ის «*წარმოებულ*» *ფუნქციას*: $3ax^2+2bx+c$.

აქ ნათლად მჟღავნდება, რომ:

პირველად: წარმოებულის მისაღებად აუცილებელია დაუშვათ $x_1=x$ (muss $x_1=x$ gesetzt werden), მაშასადამე *მკაცრი*[1] *მათემატიკური მნიშვნელობით* $x_1-x=0$, ყოველგვარი ფანდის (Flause) გარეშე შესახებ მხოლოდ უსასრულო მიახლოვებისა.

მეორედ: იმით, რომ x_1 მიიღება $=x$, და მაშასადამე $x_1-x=0$, წარმოებულში სრულებით არაფერი სიმბოლური არ შეიტანება[2]. x-ის ცვლილების საშუალებით წინად შემოტანილი სიდიდე x_1 კი არ ჰქრება, არამედ ის მხოლოდ მოიყვანება თავის მინიმალურ საზღვრამდე $=x$ და რჩება გარკვეულ ახლად შემოტანილ (neu eingeführte) ელემენტად x-ის პირველად ფუნქციაში (Originalfunktion), რომელიც კომბინირებული ნაწილობრივად თავის თავთან, ნაწილობრივად პირველად ფუნქციის x-თან, გვაძლევს საბოლოო «წარმოებულს» ე. ი. «წინასწარ» *წარმოებულს*, *მიყვანილს თავის მინიმალურ სიდიდეზე*.

x_1-ის მიყვანა x-ზე პირველ (წინასწარ) «წარმოებულის» შიგნით გადააქცევს მარცხენა მხარეზე $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-ს $\frac{0}{0}$ ანუ $\frac{dy}{dx}$-ად. მაშასადამე, ჩვენ ვიღებთ:

$$\frac{0}{0} \text{ ანუ } \frac{dy}{dx}=3ax^2+2bx+c,$$

ისე რომ *წარმოებული* გვევლინება (erscheint) როგორც დიფერენციალთა შეფარდების *ზღვარითი მნიშვნელობა*.

---

[1] შავში: უმკაცრესი.

[2] ამის ნაცვლად შავში: b) x-ის პირველად ფუნქციიდან «წარმოებულის» მიღების პროცესში ჩვენ ჯერ დაუშვით *სასრულო სხვაობები* (eine *endliche Differentiation* vornehmen). ამ ოპერაციამ მოგვცა ჩვენ წინასწარი «წარმოებული», რომელიც არის *ზღვარითი მნიშვნელობა* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-თვის. დიფერენციალური პროცესი (Differentialprozess), რომელზედაც ჩვენ შემდეგ გადავდივართ, *დაიყვანს* ამ *ზღვარით მნიშვნელობას* მის მინიმალურ სიდიდეზე. პირველი დიფერენცირებისას შემოყვანილი x_1 სიდიდე არ გაქრება და ა. შ.

ტრანსცენდენტალური ანუ სიმბოლური ხიფათი (Unglück) ხდება მხოლოდ მარცხენა მხარეზე, მაგრამ მან უკვე დაკარგა თავისი შესაშინებელი სახე, რადგან ახლა წარმოგვიდგება როგორც მხოლოდ გამოხატულება პროცესისა, რომლის რეალური შინაარსი უკვე გამომჟღავნებულია განტოლების მარჯვენა მხარეზე.

«წარმოებულში» $3ax^2+2bx+c$ ცვლადი x იმყოფება სრულებით სხვა პირობებში[1], ვიდრე x-ის პირველად ფუნქციაში (ვიდრე, სახელდობრ, ax^3+bx^2+cx-e-ში). ამიტომ ეს წარმოებული, თავის მხრით, შეიძლება წარმოგვიდგეს პირველად ფუნქციის მდგომარეობაში და განახლებულ დიფერენციალურ პროცესის დახმარებით გახდეს დედა რომელიღაც მეორე «წარმოებულისა». ეს შეიძლება განმეორდეს მანამ, სანამ ცვლადი x არ იქნება საბოლოოდ ჩამოშორებული რაიმე «წარმოებულიდან», მაშასადამე, ფუნქციებისათვის, რომელნიც მხოლოდ უსასრულო წკრივებით წარმოიდგინებიან, როგორც ამას უმეტეს შემთხვევაში აქვს ადგილი, შეიძლება განმეორდეს უსასრულოჯერ.

სიმბოლოები $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc აჩვენებენ მხოლოდ «წარმოებულის» საგვარეულო ნუსხის (Stammregister) x-ის მოცემულ პირველად ფუნქციის მიმართ. ისინი ხდებიან საიდუმლო მხოლოდ იმდენად, რამდენადაც მათ განიხილავენ როგორც მოძრაობის გამოსავალ პუნქტს, და არა როგორც უბრალო გამოხატულებას x-ის მიმდევრობით წარმოებულ ფუნქციებისას. მართლაც, მაშინ ეჩვენებათ საკვირველად, რომ გამქრალების შეფარდებამ კვლავ უნდა გაიაროს გაქრობის კიდევ უფრო მაღალი ხარისხები, იმ დროს როცა არაფერი საკვირველი არ არის იმასში, რომ, მაგალითად, $3x^2$-ს ისევე კარგად შეუძლია გაირბინოს დიფერენციალური პროცესი, როგორც, მაგალითად, მის მამამთავარს x^3-ს. ჩვენ ხომ შეგვიძლია გამოვიდეთ $3x^2$-დანაც, როგორც პირველად ფუნქციიდან.

მაგრამ, notabene. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ არის დიფერენციალურ პროცესის გამოსავალი პუნქტი (Ausgangsstätte) ფაქტიურად მხოლოდ განტოლებებში, რომელიც ჩვენ გვქონდა sub I), სადაც x შედის მხოლოდ პირველ ხარისხში. მაგრამ მაშინ, როგორც ეს ნაჩვენებია sub I), გვექნება შედეგი

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a=\frac{dy}{dx}.$$

---

[1] შავში: «სხვა კომბინაციაში».

ამგვარად აქ დიფერენციალური პროცესის დახმარებით, რომელსაც გაირბენს $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ნამდვილად არ მოიძებნება არავითარი ახალი ზღვარითი მნიშვნელობა, რადგან უკანასკნელი შესაძლებელია მხოლოდ იმდენად, რამდენადაც წინასწარი «წარმოებული» შეიცავს x ცვლადს[1] ე. ი. რამდენადაც $\frac{dy}{dx}$ რჩება გარკვეულ რეალურ პროცესის სიმბოლოდ.

ეს, რასაკვირველია, სრულებით არ უშლის ხელს იმას, რომ დიფერენციალურ აღრიცხვაში სიმბოლოები $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. და მათი კომბინაციები შეადგენდენ განტოლებათა მარჯვენა მხარეებსაც. მაგრამ მაშინ ჩვენ ვიცით აგრეთვე, რომ ასეთი წმინდა სიმბოლიური განტოლებანი მხოლოდ მიუთითებენ ოპერაციებზე, რომელნიც შემდეგ უნდა შესრულებული იყოს ცვლადების ნამდვილ ფუნქციებზე.

2) $y = ax^m$; თუ x გადაიქცევა x_1-ად, მაშინ $y_1 = ax_1^m$ და:

$y_1 - y = a(x_1^m - x^m) = a(x_1 - x)(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \text{etc}$ წევრამდე $x_1^{m-m}x^{m-1})$.

მაშასადამე:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ან } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \cdots + x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

თუ ჩვენ გამოვიყენებთ ეხლა დიფერენციალურ პროცესს ამ «წინასწარ წარმოებულზე», ისე რომ x_1 გახდება $= x$ ანუ $x_1 - x = 0$, მაშინ x_1^{m-1} გადაიქცევა x^{m-1}-ად; ისევე x^{m-1}-ად გადაიქცევიან $x_1^{m-2}x$, $x_1^{m-3}x^2$,..., და ბოლოს $x_1^{m-m}x^{m-1}$. ჩვენ მივიღებთ ამგვარად m-ჯერ ფუნქციას x^{m-1}, და «წარმოებული» იქნება ამიტომ max^{m-1}.

---

[1] შავში, ამის შემდეგ: «სადაც, მაშასადამე, მისმა მოძრაობამ შეიძლება მიგვიყვანოს ნამდვილ ახალ მნიშვნელობისაკენ, და ამიტომ $\frac{dy}{dx}$-ც არის სიმბოლო გარკვეული რეალური პროცესისა».

$x_1 = x$ გატოლების გამო «წინასწარი წარმოებულის» შიგნით[1] $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ მარცხენა მხარეზე გადაიქცევა $\frac{0}{0}$ ანუ $\frac{dy}{dx}$, საიდანაც:

$$\frac{dy}{dx} = max^{m-1}.$$

შეიძლებოდა ამ სახით გადმოცემული ყოფილიყო დიფერენციალურ აღრიცხვის ყველა ოპერაციები, მაგრამ ეს იქნებოდა საშინლად უსარგებლო პედანტიზმი. ჩვენ მაინც მოვიყვანთ აქ კიდევ ერთ მაგალითს, რადგან წინანდელებში $x_1 - x$ სხვაობა შედიოდა x-ის ფუნქციაში მ ხ ო ლ ო დ ე რ თ ხ ე ლ და ამიტომ [შეფარდების] $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ შედგენისას ქრებოდა მარჯვენა მხარეზე; ამას არა აქვს ადგილი შემდეგ შემთხვევაში:

3) $y = a^x$; თუ x გადაიქცევა x_1-ად, $y_1 = a^{x_1}$. აქედან:

$$y_1 - y = a^{x_1} - a^x =$$
$$= a^x (a^{x_1 - x} - 1).$$

მაგრამ

$$a^{x_1 - x} = [1 + (a - 1)]^{x_1 - x}$$

და:

$$[1 + (a - 1)]^{x_1 - x} = 1 + (x_1 - x)(a - 1) +$$
$$+ \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)}{1 \cdot 2}(a - 1)^2 + \text{etc.}$$

მაშასადამე,

$$y_1 - y = a^x (a^{x_1 - x} - 1) = a^x \Big\{ (x_1 - x)(a - 1) +$$
$$+ \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)}{1 \cdot 2}(a - 1)^2 +$$
$$+ \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)(x_1 - x - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a - 1)^3 + \text{etc.} \Big\}.$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ანუ } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \Big\{ (a - 1) + \frac{x_1 - x - 1}{1 \cdot 2}(a - 1)^2 +$$
$$+ \frac{(x_1 - x - 1)(x_1 - x - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a - 1)^3 + \text{etc.} \Big\}.$$

[1] ე. ი. მარჯვენა მხარეზე.

თუ ახლა x_1 გადაიქცევა $= x$ და, მაშასადამე, $x_1 - x = 0$, ჩვენ მივიღებთ «წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ს ა თ ვ ი ს» გამოსახულებას:

$$a^x \left\{ (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{etc.} \right\}.$$

ამგვარად:

$$\frac{dy}{dx} = a^x \left\{ (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{etc.} \right\}.$$

თუ ჩვენ ეხლა მუდმივების ჯამს, მდგომს ბრჩხილებში, აღვნიშნავთ A-თი, გვექნება:

$$\frac{dy}{dx} = Aa^x.$$

მაგრამ ეს $A = a$ რიცხვის ნეპერის ლოგარითმისა, მაშ: $\frac{dy}{dx}$ ან, თუ ჩავსვამთ y-ის ნაცვლად მის მნიშვნელობას,

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \lg a$$

და

$$da^x = a^x \lg a \; dx.$$

$\frac{0}{0}$ სიმბოლოს $\frac{dy}{dx}$ სიმბოლოთი შეცვლა.

(შ ე ნ ი შ ვ ნ ე ბ ი)

I

ნაჩვენებია, რომ

1) თუ, მაგალითად, $y = ax^m = f(x)$; $y_1 = ax_1^m$, ჩვენ მივიღებთ

$$\frac{dy}{dx} \text{ ანუ } \frac{0}{0} = max^{m-1}.$$

ნაჩვენები იყო, რომ წარმოებული ფუნქცია $f'(x)$ ანუ max^{m-1} მიიღება პირველადიდან $f(x) = ax^m$ დაშვებით $x_1 = x$ ე. ი. $x_1 - x = 0$.

მაგრამ იგივე დაშვება $x_1 - x = 0$ ანუ $x_1 = x$ გადააქცევს $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ $\frac{0}{0}$-ად, და ჩვენ ვწერთ უკანასკნელის ნაცვლად $\frac{dy}{dx}$, იმისათვის, რომ

ვაჩვენოთ როგორია ამ $\frac{0}{0}$-ის წარმოშობა ე. ი. ნამდვილი სხვაობე-ბის როგორი შეფარდება — მოყვანილ შემთხვევაში $\frac{y_1-y}{x_1-x}$ — გადაიქცევა ბოლოსდაბოლოს $\frac{0}{0}$-ად.

ეს მით უფრო გამართლებულია, რომ ჩვენ შედეგად მივიღეთ

$$\frac{0}{0}=max^{m-1}=f'(x),$$

და ეს $\frac{0}{0}$ შედეგი განტოლების მარცხენა მხარეზე მიღებული იყო იმ მოძრაობათა მეშვეობით, რომელნიც მომდინარეობდენ მარჯვენა მხარეზე მოთავსებულ x ცვლადისაგან.

$\frac{0}{0}$ შეიძლება ნებსით x სიდიდის ტოლი იყოს, რადგან $0=x\cdot 0=0$. იმაზე, რომ განსახილველ შემთხვევაში $\frac{0}{0}$ ტოლია არა ნებსით x სიდიდისა, არამედ $=max^{m-1}$, მითითებულია სიმბოლოთი $\frac{dy}{dx}$ ანუ $\frac{df(x)}{dx}$, რომელიც გვიჩვენებს დამოუკიდებელი x ცვლადის რომელ მოძრაობათა გამო გაჩნდა ეს $\frac{0}{0}$ სიმბოლო რომელიღაც გარკვეულ $f(x)$ ფუნქციაში.

2) მაგრამ იმის შემდეგ, რაც აზრი $\frac{dy}{dx}$-ისა, რომლის კერძო მნიშვნელობანი, როგორც ეს ბუნებრივია, იცვლებიან თვით $f(x)$-ის გარკვეულ სახისაგან დამოკიდებულებით, ერთხელდასაბოლოოდ ფიქსირებულია, და როგორც კი ჩვენ უკვე დიფერენციალურ აღრიცხვის ნიადაგზე გადავედით, ამოცანა შეტრიალდება. სწორედ, მოთხოვნილი იქნება დიფერენცირების საშუალებით მოინახოს $\frac{dy}{dx}$-თვის მისი კერძო მნიშვნელობა, როგორც, მაგალითად, ზემოთ $=max^{m-1}$, ე. ი. წარმოებული ფუნქცია, რომელსაც ის ეთანადება.

შეფარდება $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ანუ $\frac{f(x+h)-f(x)}{x_1-x}$ ანუ $\frac{y_1-y}{x_1-x}$ ანუ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ გამოთქვამს:

$f(x)$ საწყის სიდიდის და მის გაზრდილ მნიშვნელობის $f(x+h)$ სხვაობას და შეფარდებას წილისა (Rate), რომლითაც გაიზარდა x-ის ფუნქცია ($=f(x)$) ზრდის წილთან იმ x ცვლად სიდიდისა, რომლის ფუნქცია ის არის. ეს არის შეფარდება x-ის ფუნქციის სხვაობისა თვით ცვლად x სიდიდის სხვაობაზე. მ რ ი ც ხ ვ ე ლ შ ი გვაქვს სხვაობანი x-ის ფ უ ნ ქ ც ი ა თ ა შორის, მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ შ ი — სხვაობა თვით x ც ვ ლ ა დ ი ს ი დ ი დ ი ს საწყის და გაზრდილ მნიშვნელობათა შორის; მნიშვნელში — x-ის ცვალების ზომა, მრიცხველში მისი ფუნქციის ცვალების ზომა.

Δy ა რ ი ს y-ი ს პ ი რ ვ ე ლ ი ს ხ ვ ა ო ბ ა, ხოლო Δx არის x-ის პ ი რ ვ ე ლ ი ს ხ ვ ა ო ბ ა. თუ Δx ხდება ნული, Δy-იც ნული ხდება, რადგან y მხოლოდ იმდენად გახდა y_1, რამდენადაც x გადაიქცა $x+\Delta x$-ად. მაგრამ ცხადია, რომ აქ Δy ანუ y_1-y ნულად არა მარტო ხდება, არამედ ხდება მხოლოდ Δx-ის ნულად გადაქცევის ანუ $x_1=x$ ქმნადობის გამო.

ამგვარად, Δy-ის გაქრობაშიაც შენარჩუნებულია y ფუნქციის დამოკიდებულება x ცვლად სიდიდისაგან, რომლის ფუნქცია ის არის; გადაქცევა ამ Δy-ის საბოლოო შედეგში 0-ად, მისი გაქრობა თვით რჩება x ცვლადის ნაზრდის Δx-ის გაქრობის შედეგად. თვით ნულიფიკაციამდე [ნაზრდებისა] შენარჩუნებულია დამოკიდებულება y ფუნქციისა x დამოუკიდებელ ცვლადისაგან. მაგრამ გამოსახულებაში $\frac{0}{0}$ გაქრა ასევე თ ვ ი ს ო ბ რ ი ვ ი შ ე ფ ა რ დ ე ბ ა y ფუნქციის და x ცვლადს შორის, რომლის ფუნქციას ის წარმოადგენს; გამოსახულებაში $\frac{0}{0}$ წაიშალა ყოველივე კვალი თ ვ ი ს ო ბ რ ი ვ ი განსხვავებისა მრიცხველსა და მნიშვნელს შორის, ცვლადი სიდიდის ფუნქციასა და თვით ამ ცვლადი სიდიდეს შორის.

ამიტომ იმისათვის, რომ გამოითქვას $\frac{0}{0}$-ის წარმოშობა და აზრი, ჩვენ აღვნიშნავთ გამქრალ Δx-ს dx-ით, რის გამო გამქრალი Δy უკვე თითონვე გადაიქცევა dy-ად.

ამგვარად, $\frac{dy}{dx}$ არის არა მარტო სიმბოლო $\frac{0}{0}$-თვის, არამედ იმავე დროს პ რ ო ც ე ს ი ს სიმბოლო, რის გამოც პირველადი განტოლების გარკვეულ მოცემულ პირობებში გაჩნდა $\frac{0}{0}$; და ის გამოთქვამს იმას, რისი გამოთქმა არ შეუძლია $\frac{0}{0}$-ს — სახელდობრ, რომ Δy-ის ნულად გადაქცევა ჩნდება y ფუნქციის x დამოუკიდებელ ცვლადისადმი თვისობრივი დამოკიდებულებისაგან და რომ ამიტომ გარდაქმნა Δy-ის dy-ად არის შედეგი Δx-ის გარდაქმნისა dx-ად. მაშასადამე უარყოფაში შენარჩუნებულია უარყოფილი თ ვ ი ს ო ბ რ ი ვ ი დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ე ბ ა. პირიქით, $\frac{0}{0}$-ში არ ჩანს რა ქრება, გამოთქმულია მხოლოდ რ ა ო დ ე ნ ო ბ ი თ ი მხარე — სახელდობრ, რომ გაქრა მრიცხველი და აგრეთვე მნიშვნელი და ამით ქრება თვით შეფარდებაც; თ ვ ი ს ო ბ რ ი ვ ი შ ე ფ ა რ დ ე ბ ა, რომელიც ა რ ს ე ბ ო ბ ს, რამდენადაც 0 მრიცხველში არის მხოლოდ შ ე დ ე გ ი 0-სა მნიშვნელში, მაშასადამე თითონ არის ფუნქციის დამოკიდებულების გამომხატველი ცვლადი სიდიდისაგან, რისი ფუნქციაც ის არის — არაა გამოთქმული. სავსებით სწორია, რომ $\frac{0}{0}$-ს შეუძლია გამოთქვას ნებსითი სიდიდე, მაგრამ სრულებით ასევე x-მაც შეიძლება გამოთქვას ნებსითი სიდიდე; $\frac{0}{0}$-ის კერძო მნიშვნელობა, ისევე, როგორც x-ის, ყოველ კერძო შემთხვევაში დამოკიდებულია იმ გარკვეულ პირობებზე ან ფუნქციებზე, რომლებშიაც ფიგურირებს ეს $\frac{0}{0}$ ან x, გარკვეულ პირობებზე, რომლებისგანაც ჩნდება $\frac{0}{0}$ ან რომლებშიაც იცვლება x. მაგრამ $\frac{dy}{dx}$ სიმბოლოსაკენ, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-ის $\frac{0}{0}$-ად გარდასაქმნელად, ჩვენ მიგვიყავს არა მარტო $\frac{0}{0}$-ის გაჩენის პროცესის გამოკვლევა, არამედ შედეგიც, რომელიც პირველად განტოლებიდან მიიღება. სწორედ ეს შედეგი არის: $\frac{0}{0}=f'(x)$, და არა $\frac{0}{0}=0$ ან რომელიმე სხვა ნებსითი რეალური მნიშვნელობა.

შედარება დიფერენცირების მარქსის მეთოდის დ'ალამბერის მეთოდთან.

შევადაროთ დ'ალამბერის მეთოდი გეომეტრიულს[1].

I) $f(x)$ ანუ $y=x^3$.

$a)$ $f(x+h)$ ანუ $y_1=(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$,

$b)$ $f(x+h)-f(x)$ ანუ $y_1-y=3x^2h+3xh^2+h^3$,

$c)$ $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ანუ $\dfrac{y_1-y}{h}=3x^2+3xh+h^2$;

თუ $h=0$, მაშინ

$d)$ $\dfrac{0}{0}$ ანუ $\dfrac{dy}{dx}=3x^2=f'(x)$.

II) $f(x)$ ანუ $y=x^3$.

$a)$ $f(x_1)$ ანუ $y_1=x_1^3$,

$b)$ $f(x_1)-f(x)$ ანუ $y_1-y=x_1^3-x^3=(x_1-x)(x_1^2+x_1x+x^2)$,

$c)$ $\dfrac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$ ანუ $\dfrac{y_1-y}{x_1-x}=x_1^2+x_1x+x^2$;

თუ x_1 ხდება $=x$, მაშინ $x_1-x=0$, მაშასადამე

$d)$ $\dfrac{0}{0}$ ანუ $\dfrac{dy}{dx}$ $(=x^2+xx+x^2)=3x^2$.

ორივე [მეთოდში] გვაქვს ერთიდაიგივე, რამდენადაც: თუ იზრდება დამოუკიდებელი x ცვლადი, იზრდება დამოკიდებული y ცვლადიც. ყველაფერი დაიყვანება იმაზე, როგორაა გამოსახული x-ის ზრდა. როცა x ხდება x_1, მაშინ $x_1-x=\Delta x=h$ (— განუზღრელის, მაგრამ ყოველთვის სასრულოდ დარჩენილ სხვაობის).

Δx ანუ h არის ნაზრდი, რომლითაც გაიზარდა x, ვინაიდან $a)$ $x_1=x+\Delta x$; მაგრამ პირიქითაც $b)$ $x+\Delta x$ ანუ $x+h=x_1$.

ისტორიულად დიფერენციალური აღრიცხვა გამოდის $a)$-დან, ე. ი. იმისაგან, რომ სხვაობა Δx ანუ ნაზრდი h (ერთი გამოთქვამს იმასვე, რასაც მეორე, პირველი უარყოფითად, როგორც სხვაობას Δx, მეორე დადებითად, როგორც ნაზრდს h) **დამოუკიდებლად ხრსებობს** x **სიდიდის** გვერდით, რომლის ნაზრდი ის არის, რომელსაც ის ამგვარად გამოთქვამს როგორც **გაზრდილს**, მაგრამ გაზრდილს h-ით. ამით თავიდანვე მიღწეულია ის უპირატესო-

[1] როგორც სჩანს, წერის შეცდომაა. მარქსს ალბად უნდოდა დაეწერა «ალგებრულს».

ბა, რომ ამ ზოგადი გამოსახულების შესაბამისი პირველადი ფუნქცია გაზრდილი ცვლადისა გამოისახება გარკვეულ ხარისხის ბინომებში და ამიტომ თავიდანვე მისთვის გამოსაყენები ხდება თეორემა ბინომის შესახებ. მართლაც, უკვე ზოგად, მარცხენა მხარეზე ჩვენ გვაქვს ბინომი, სახელდობრ $[f](x+\Delta x)$ ანუ $y_1 =$ etc.

მისტიური დიფერენციალური აღრიცხვა ერთბაშად გადააქცევს $x+\Delta x$-ს $x+dx$-ად ან, ნიუტონის მიხედვით, $x+\dot{x}$-ად [1]. ამის გამო ჩვენ მარჯვენა, ალგებრულ მხარეზეც ერთბაშად ვიღებთ ბინომებს $x+dx$ ანუ $x+\dot{x}$, რომლებსაც შემდეგ ექცევიან, როგორც ჩვეულებრივ ბინომებს. გადაქცევა Δx-ის dx-ად ან $\dot{x}$-ად a priori იგულისხმება, ნაცვლად იმისა, რომ იყოს მათემატიკურად გამოყვანილი (abgewiesen); აქედან შემდგომი მისტიკური უკუგდება (Unterdrückung) წევრებისა ბინომების დაშლაში.

დ'ალამბერი გამოდის $x+dx$-დან, მაგრამ ასწორებს ამ გამოსახულებას $x+\Delta x$-ად, შესაბამისად $x+h$. ახლა უკვე საჭირო ხდება განვითარება, რომელიც Δx გადააქცევდა h-ად ან dx-ად, მაგრამ მხოლოდ ამაზე დაიყვანება განვითარება, რომელიც ნამდვილად ხდება.

სულ ერთია გამოდიან—არასწორად—$x+dx$-დან თუ—სწორად—$x+h$-დან, ეს განუზღვრელი ბინომი, ჩასმული x-ის მოცემულ ალგებრულ ფუნქციაში, გადააქცევს მას რომელიღაც გარკვეულ ხარისხის ბინომად (ასე I a-ში) x^3-ის ნაცვლად ჩნდება $(x+h)^3$, და ამასთანავე ისეთ ბინომად, რომელშიაც ერთ შემთხვევაში dx, მეორეში h ფიგურირებს უკანასკნელი წევრის სახით, და მაშასადამე ამ ბინომის დაშლაში მხოლოდ მამრავლის სახით, რომელიც გარეგნულად ემატება ბინომით წარმოებულ ფუნქციებს.

ამიტომ უკვე I a)-ში ჩვენ ვპოულობთ მზა სახით პირველ წარმოებულს x^3-დან, სახელდობრ როგორც $3x^2$, როგორც წკრივის მეორე წევრის კოეფიციენტს, h მამრავლით თანდართულს (behaftet) დაწყებული აქედან $3x^2 = f'(x)$ რჩება უცვლელი. თვით ის არ არის ნაწარმოები რაიმე სახის დიფერენცირების პროცესით, არამედ თავიდანვე მოწოდებულია (geliefert) თეორემით ბინომის შესახებ, და ამასთანავე იმიტომ, რომ ჩვენ თავიდანვე წარმოვადგინეთ გაზრდილი x ბინომის სახით $x+\Delta x = x+h$, h-ით გაზრდილ x-ის სახით. მთელი ამოცანა ახლა იმაში მდგომარეობს, რომ გავანთავისუფლოთ (losscha-

---

[1] მარქსი სწერს $x+\dot{x}$ ნაცვლად ნიუტონისეულის $x+\dot{x}o$, რაზედაც მიუთითებს ისტორიულ მიმოხილვაში.

len) სრულებით მზა, და არა მხოლოდ ემბრიონალურად არსებული $f'(x)$ [წარმოებული] მის მამრავლიდან h და იმ წევრებიდან, რომელიც მას თან ახლავს.

პირიქით, II a)-ში გაზრდილი x_1 შედის ალგებრულ ფუნქციაში სრულებით ისეთსავე სახით, რომლითაც მასში თავში შედიოდა x: x^3 ხდება x_1^3. წარმოებული $f'(x)$ შეიძლება მიღებული იყოს მხოლოდ ბოლოს, დიფერენცირების ორი ოპერაციის მომდევრობით შესრულების შედეგად, ყოველ რომელთაგანს სრულებით თავისებური ხასიათი აქვს.

განტოლებაში I b) სხვაობა $f(x+h)-f(x)$ ანუ y_1-y თუმცაღა ამზადებს სიმბოლიურ დიფერენციალურ კოეფიციენტის გაჩენას, მაგრამ რეალურის მიმართ არაფერს ცვლის, გარდა იმისა, რომ გადაიტანს მას წკრივის მეორე ადგილიდან პირველზე და ამით შესაძლებლად ხდის h-გან განთავისუფლებას.

II b)-ში ჩვენ ვღებულობთ სხვაობების გამოსახულებებს ორივე მხარეზე. ალგებრული მხარის განვითარებისას ჩნდება x_1-x როგორც მამრავლი x და x_1-ის წარმოებულ ფუნქციასთან, რომელიც მიიღება $x_1^3-x^3$-ის გაყოფით x_1-x-ზე. მხოლოდ სხვაობის $x_1^3-x^3$ მოცემულობამ შესაძლებლად გახადა მისი დაშლა ორ მამრავლად. რადგან $x_1-x=h$, ორი მამრავლი, რომლებათაც დაშლილია $x_1^3-x^3$, შეიძლება დაიწეროს აგრეთვე სახით $h(x_1^2+x_1x+x^2)$. ეს ამჟღავნებს ახალ განსხვავებას I b)-საგან. თვით h წ ი ნ ა ს წ ა რ წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ს მ ა მ რ ა ვ ლ ი ს სახით მიღებულია მხოლოდ $x_1^3-x^3$ სხვაობის განვითარებით ორი მამრავლის ნამრავლად, იმ დროს როცა h როგორც მამრავლი «წარმოებულისა», და თვით ეს უკანასკნელიც, I b)-ში არსებობს მზა სახით რომელიც არ უნდა იყოს სხვაობის რაიმე განვითარებამდე. ის, რომ განუზღვრელი გაზრდა x-სა x_1-მდე იღებს x-დან გამოყოფილ და მის გვერდით არსებულ h მამრავლის ფორმას, I-ში იგულისხმება თავიდანვე, იმ დროს, როცა II-ში (რადგან $x_1-x=h$) მტკიცდება თვით გამოყვანით (Ableitung). თუმცა h I, ერთის მხრით, განუზღვრელია, მაგრამ, მეორეს მხრით, იგი უკვე იმდენად განზღვრულია, რომ x-ის განუზღვრელი ზრდა წარმოსდგება უკვე როგორც თ ა ვ ი ს თ ა ვ ა დ ი (eigene) სიდიდე, რომლითაც x გაიზარდა და ამიტომ როგორც ასეთი x-ის გვერდით დგას.

შემდეგ, I c)-ში $f'(x)$ თავისუფლდება თავის h მამრავლიდან, და ჩვენ ვღებულობთ მარცხენა მხარეზე $\frac{y_1-y}{h}$ ანუ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ე. ი.

დიფერენციალურ კოეფიციენტის რაღაც ჯერ კიდევ სასრული გამოსახულებას. მაგრამ მეორე მხარეზე ჩვენ ვაღწევთ იმას, რომ დაუშვებთ რა $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$-ში $h=0$ და გადავაქცევთ ამგვარად ამ უკანასკნელს $\frac{0}{0}=\frac{dy}{dx}$-ად, ჩვენ, ერთის მხრით, ვღებულობთ I d)-ში სიმბოლიურ დიფერენციალურ კოეფიციენტს, და მეორის მხრით—უკვე I a)-ში მზა სახით არსებული [წარმოებული] $f'(x)$ თავისუფლდება ეხლა იმ წევრებისაგან, რომელიც თან ახლავს, და მხოლოდ ერთი რჩება მარჯვენა მხარეზე.

დადებითი განვითარება ხდება მხოლოდ მარცხენა მხარეზე, რამდენადაც აქ მიიღება სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტი. მარჯვენა მხარეზე განვითარება მხოლოდ იმასში მდგომარეობს, რომ გავანთავისუფლოთ $f'(x)=3x^2$, რომელიც უკვე I a)-ში იყო ბინომის საშუალებით ნაპოვნი, მისი პირვანდელი თანამგზავრებისაგან. გადაქცევას h-ის ნულად ანუ $x_1-x=0$ მარჯვენა მხარეზე აქვს მხოლოდ ეს უარყოფითი აზრი.

პირიქით, II c)-ში ჯერ მიიღება **წინასწარი წარმოებული** — ორივე მხარის გაყოფით $x_1-x\,(=h)$-ზე.

დაბოლოს II d)-ში დადებითი მიღება (setzen) $x_1=x$ გვაძლევს **საბოლოო წარმოებულს**. მაგრამ ეს მიღება $x_1=x$ იმავე დროს ნიშნავს მიღებას $x_1-x=0$ და ამის გამო გადააქცევს მარცხენა მხარეზე $\frac{y_1-y}{x_1-x}$ სასრული შეფარდებას $\frac{0}{0}$ ან $\frac{dy}{dx}$-ად.

I-ში «წარმოებული» ისევე ნაკლებად (ebensowenig) მოინახება მიღების $x_1-x=0$ ანუ $h=0$ საშუალებით, როგორც მისტიკურ დიფერენციალურ მეთოდში. ორივე შემთხვევაში მოიცილებიან გზიდან თანაგვერდა წევრები, რომელნიც თან ახლავს თავიდანვე მზა სახით გამოსულ [წარმოებულს] $f'(x)$ — აქ მათემატიკურად სწორად, იქ კი coup d'état-ს საშუალებით.

II

ᲓᲘᲤᲔᲠᲔᲜᲪᲘᲐᲚᲘ ᲓᲐ ᲓᲘᲤᲔᲠᲔᲜᲪᲘᲐᲚᲣᲠᲘ ᲐᲦᲠᲘᲪᲮᲕᲐ

გადატრიალება მეთოდში. დიფერენციალი

I

ვთქვათ საჭიროა დიფერენცირება $f(x)$ ანუ $y=uz$-ის, სადაც u და z დამოუკიდებელ x ცვლადისაგან დამოკიდებული ფუნქციებია; ისინი არიან დამოუკიდებელი ცვლადები მათზე დამოკიდებულ y ფუნქციის შიმართ, რომელიც ამგვარად დამოკიდებულია აგრეთვე x-დან.

$$y_1 = u_1 z_1$$

$$y_1 - y = u_1 z_1 - uz = z_1 (u_1 - u) + u(z_1 - z)$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ანუ } \frac{\Delta y}{\Delta x} = z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + u \frac{z_1 - z}{x_1 - x}.$$

თუ ეხლა მარჯვენა მხარეზე x_1 გახდება $= x$, მაშასადამე $x_1 - x = 0$, მაშინ $u_1 - u = 0$, $z_1 - z = 0$, მაშასადამე z_1 მამრავლი $z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x}$-ში გადაიქცევა z-ად და ბოლოს მარცხენა მხარეზე $y_1 - y = 0$.

ამგვარად

$$A) \qquad \frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}.$$

ეს განტოლება, გამრავლებული ყველა მისი წევრების საერთო მნიშვნელზე dx, გადაიქცევა

$$B) \qquad dy = z\, du + u\, dz.$$

2) განვიხილოთ ჯერ განტოლება A)

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}.$$

განტოლებებში მხოლოდ ერთი, x-დან დამოკიდებული, ცვლადით საბოლოო შედეგი იყო ყოველთვის

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

სადაც $f'(x)$ — $f(x)$-ის პირველი «წარმოებული» — იყო თავისუფალი ყოველგვარ სიმბოლიური გამოსახულებიდან, როგორც მაგალითად mx^{m-1} იმ შემთხვევისათვის, როცა x^m არის დამოუკიდებელ x ცვლადის პირველადი ფუნქცია. სწორედ დიფერენცირების პროცესის გამო, რომელიც უნდა გაერბინა $f(x)$ ფუნქციას, რომ $f'(x)$-ად გადაქცეულიყო, — უკანასკნელის ე. ი. რეალურ დიფერენციალურ კოეფიციენტის შესახვედრად, გაჩნდა მარცხენა მხარეზე მისი სიმბოლიური ექვივალენტის სახით მისი ორეული $\frac{0}{0}$ ანუ $\frac{dy}{dx}$. მეორე მხრით, $\frac{0}{0}$ ანუ $\frac{dy}{dx}$-მა მონახა ამგვარად $f'(x)$-ში თავის რეალური ექვივალენტი.

პირიქით, განტოლებაში $A)$ $f'(x)$, პირველი წარმოებული uz-დან, თითონ შეიცავს სიმბოლიურ დიფერენციალურ კოეფიციენტებს, რომელნიც ამიტომ დგანან განტოლების ორივე მხარეზე, იმ დროს როცა რეალური მნიშვნელობა არცერთზე არაა. მაგრამ რადგან uz-ზე გამოიყენეს იგივე მეთოდი, რაც წინად x-ის ფუნქციაზე მხოლოდ ერთი დამოუკიდებელი[1] ცვლადით, ეს კონტრასტი შედეგებში, ცხადია, გამოწვეულია თვით გამოსავალ ფუნქციის ე. ი. uz-ის სპეციფიურ ხასიათით—დაწვრილებით იმის შესახებ sub 3).

3) წინად განხილულ განტოლებებში, როგორც $y = x^m$, $y = a^x$, etc, x-ის რომელიღაც პ ი რ ვ ე ლ ა დ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს ეპირისპირება მისგან «დამოკიდებული» y. $y = uz$-ში ორივე მხარე დაკავებულია «დამოკიდებული ცვლადებით». თუ y აქ უშუალოდ «დამოკიდებულია» u და z-გან, უკანასკნელები, თავის მხრივ, დამოკიდებულია x-გან. ეს საწყის uz ფუნქციის თავისებური ხასიათი ერთნაირის აუცილებლობით (notwendig) ასვამს თავის დაღს (aufprägt) მის «წარმოებულს.»

რომ u არის x-ის ფუნქცია, ხოლო z—რომელიღაც სხვა ფუნქცია x-ის, შეიძლება შემდეგნაირად გამოისახოს:

$$u = f(x), \quad z = \varphi(x),$$

ამის გამო

$$u_1 - u = f(x_1) - f(x),$$
$$z_1 - z = \varphi(x_1) - \varphi(x).$$

მაგრამ გამოსავალი განტოლება არ გვაძლევს არც $f(x)$ და არც

[1] წერის შეცდომა. უნდა იყოს «დამოკიდებული».

$\varphi(x)$-თვის x-ის პირველად ფუნქციებს ე. ი. გარკვეულ მნიშვნელობებს x-ში. მაშასადამე, u და z ფიგურირებენ მხოლოდ როგორც სახელწოდებანი, როგორც x-გან დამოკიდებული ფუნქციის სიმბოლოები; ამიტომ uz-დან წარმოებულის მიღების პროცესით უშუალოდ მოწოდებული იქნება მხოლოდ **ზოგადი ფორმები ამ დამოკიდებულების ურთიერთობისა** (Abhängigkeitsverhältnis):

$$\frac{u_1-u}{x_1-x}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x},$$

$$\frac{z_1-z}{x_1-x}=\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x)}{x_1-x}.$$

როცა პროცესი აღწევს ისეთ პუნქტს, სადაც x_1 მიიღება $=x$, მაშასადამე $x_1-x=0$, ეს ზოგადი ფორმულები გადაიქცევა

$$\frac{du}{dx}=\frac{df(x)}{dx},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{d\varphi(x)}{dx}$$

და სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტები რჩდებიან, როგორც ასეთები, «წარმოებულების» შიგნით. მაგრამ განტოლებებში მხოლოდ ერთი დამოკიდებული ცვლადით $\frac{dy}{dx}$-ს არა აქვს არავითარი სხვა მნიშვნელობა, გარდა იმისა, რომელიც აქ აქვთ $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. ის არის აგრეთვე მხოლოდ სიმბოლიური **დიფერენციალური გამოსახულება**

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}\text{-თვის}.$$

თუმცა ბუნება $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, ე. ი. საერთოდ სიმბოლიურ დიფერენციალურ კოეფიციენტების, სრულებით არ იცვლება, როცა ისინი რჩდებიან **თვით წარმოებულის შიგნით** ე. ი. დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა მხარეზეც, მაგრამ ამით იცვლება მათი როლი, და აგრეთვე განტოლების ხასიათი.

წარმოვადგინოთ, ზოგადი სახით, uz საწყისი ფუნქცია $f(x)$-ით და, მაშასადამე, მისი პირველი წარმოებული $f'(x)$-ით, მაშინ

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}$$

მიიღებს სახეს:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x).$$

ამავე ზოგად ფორმას ჩვენ ვღებულობთ განტოლებისათვის მხოლოდ ერთი დამოკიდებული ცვლადით. ორივე შემთხვევაში $\frac{dy}{dx}$-ის გამოსავალი ფორმები ჩნდებიან გამოყვანის პროცესებიდან, რომელნიც $f(x)$ გადააქცევს $f'(x)$-ად. ამიტომ, როგორც კი $f(x)$ გადაიქცა $f'(x)$-ად, უკანასკნელს უპირისპირდება უკვე $\frac{dy}{dx}$ მისი საკუთარი სიმბოლიური გამოსახულების, მისი ორეულის ან სიმბოლიური ექვივალენტის სახით.

ორივე შემთხვევაში $\frac{dy}{dx}$ თამაშობს ამიტომ **ერთნაირ როლს.**

სხვაგვარად არის საქმე $\frac{du}{dx}$ და $\frac{dz}{dx}$-თვის: სხვა ელემენტებთან ერთად $f'(x)$ წარმოებულისა, რომელშიაც ისინი ჩართული არიან, ისინი ჰპოულობენ $\frac{dy}{dx}$-ში თავის სიმბოლიურ გამოსახულებას, თავის სიმბოლიურ ექვივალენტს, მაგრამ თვით ისინი, თავის მხრით, არ უპირისპირდებიან არავითარ $f'(x)$, $\varphi'(x)$, რომელთათვისაც ისინი იქნებოდენ სიმბოლიური ორეულები. ერთმხრივად გაჩნდნენ ისინი ქვეყანაზე, ჩრდილები უსხეულოთ, რომელიც მათ უკუაგდებს; სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტები გარეშე რეალურ დიფერენციალურ კოეფიციენტების ე. ი. გარეშე შესაბამის ექვივალენტურ «წარმოებულების». სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტი ხდება ამგვარად **დამოუკიდებელი** (selbständige) **გამოსავალი პუნქტი.** მისი რეალური ექვივალენტი აწი უნდა იყოს ნახული. ამგვარად ინიციატივა გადაინაცვლა მარჯვენა ალგებრულ პოლუსიდან მარცხენა—სიმბოლიურზე. მაგრამ სწორედ ამით დიფერენციალური აღრიცხვა გამოდის როგორც გარკვეული სპეციფიური აღრიცხვა, უკვე დამოუკიდებულად მომქმედი თავის საკუთარ ნიადაგზე, რადგან მისი გამოსავალი პუნქტები არიან მხოლოდ მისადმი კუთვნილი და მისი მახასიათებელი მათემატიკური სიდიდეები. და მეთო-

-დის ეს შემობრუნება მიღებულია აქ როგორც შედეგი uz-ის ალგებრული დიფერენცირების. ამგვარად ალგებრული მეთოდი თითონვე გარდაიქმნება მისადმი მოპირისპირე დიფერენციალურში[1].

მაგრამ რას წარმოადგენენ «წარმოებულები», რომლებიც ეთანადებიან სიმბოლიურ დიფერენციალურ კოეფიციენტებს $\frac{du}{dx}$ და $\frac{dz}{dx}$?

გამოსავალი განტოლება $y = uz$ არ იძლევა არავითარ მონაცემს ამ საკითხის გადასაწყვეტად. უკანასკნელზე შეიძლება ვუპასუხოთ, თუ u და z-ის ნაცვლად ჩავსვამთ ნებსით საწყის ფუნქციებს x-სა, მაგალითად:

$$u = x^4$$
$$z = x^3 + ax^2.$$

მაგრამ ამით სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტები მაშინვე გადაიქცევიან ოპერაციების სიმბოლოებად, პროცესების სიმბოლოებად, რომლებიც უნდა იყოს წარმოებული x^4 და $x^3 + ax^2$-ზე მათ «წარმოებულების» მოსაძებნად. თავში გაჩენილი როგორც «წარმოებულის» სიმბოლიური გამოსახულება ე. ი. დიფერენცირების უკვე შესრულებულ ოპერაციებისა—სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტი თამაშობს ახლა როლს დიფერენცირების ოპერაციების სიმბოლოსი, რომლებიც ჯერ კიდევ უნდა შესრულდეს (erst zu vollziehende).

---

[1] ეს აბზაცი შავში:

«შებრუნებით $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$-თვის. დაბადებული წარმოებულის შიგნით ისინი პოულობენ — უკანასკნელის დანარჩენ ელემენტებთან ერთად — $\frac{dy}{dx}$-ში თავის საკუთარ სიმბოლიურ გამოსახულებას, მაშასადამე თავის სიმბოლიურ ექვივალენტს. მაგრამ თითონ ისინი ჩნდებიან გარეშე ექვივალენტებისა, ნამდვილ დიფერენციალურ კოეფიციენტებისა ე. ი. გარეშე წარმოებულების $f'(x)$, $\varphi'(x)$, რომლების სიმბოლიურ გამოსახულებად ისინი იქნებოდნენ თავის მხრით. ისინი წარმოგვიდგებიან როგორც მზა დიფერენციალური სიმბოლოები. მათი რეალური მნიშვნელობანი ჩრდილების მსგავსია, რომლების სხეული კიდევ უნდა იყოს მონახული. ამგვარად, ამოცანა პირდაპირ ხელთ ქვეშ შემოტრიალდა. სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტები ხდებიან სრული მნიშვნელობით გამოსავალი პუნქტები, რომლების ექვივალენტი, ნამდვილი დიფერენციალური კოეფიციენტი ან შესაბამისი წარმოებული ფუნქცია კიდევ უნდა იყოს მონახული. ამით ინიციატივა გადანაცვლებულია მარჯვენა პოლუსიდან მარცხენაზე რადგან მეთოდის ეს გადატრიალება გამოწვეულია uz ფუნქციის ალგებრული მოძრაობით, თითონ ის უნდა იყოს ალგებრულად დასაბუთებული».

ამასთან ერთად განტოლება

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx},$$

თავიდანვე წმინდა სიმბოლიური, რადგან არა აქვს სიმბოლოებისაგან თავისუფალი მხარე, — გადაიქცევა ზოგად სიმბოლიურ ოპერატიულ განტოლებად.

შევნიშნავ კიდევ, რომ[1] XVIII ს. დასაწყისიდან ჩვენ დრომდე დიფერენციალური აღრიცხვის ზოგადი ამოცანა ჩვეულებრივ შემდეგნაირად არის ჩამოყალიბებული: მოინახოს სიმბოლიურ დიფერენციალურ კოეფიციენტისათვის მისი რეალური ექვივალენტი.

4)

A) $$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}.$$

ცხადია, რომ ეს არაა A) განტოლების უმარტივესი გამოსახულება, რადგან ყველა მისი წევრები შეიცავენ საერთო მნიშვნელს dx. მისი ჩამოცილებით მივიღებთ:

B) $d\,uz$ ანუ $dy=z\,du+u\,dz$.

B)-ში გაქრა ყოველგვარი კვალი მისი A)-დან წარმოშობისა. ამიტომ იგი სამართლიანია როგორც იმ შემთხვევისათვის, როცა u და z დამოკიდებულია x-დან, ისე იმ შემთხვევისათვის, როცა ისინი — დამოუკიდებლად x-თან რაიმე ურთიერთობისა — მხოლოდ ურთიერთ დამოკიდებულია. ეს თავიდანვე სიმბოლიური განტოლებაა და მას თავიდანვე შეუძლია გვემსახუროს როგორც სიმბოლიური ოპერატიული განტოლება. უკანასკნელ შემთხვევაში ის გვეუბნება, რომ, თუ

$$y=uz \text{ etc.},$$

ე. ი. თუ $y=$ ცვლადთა ნებსით რიცხვის ნამრავლისა, მაშინ $dy=$ ნამრავლთა ჯამისა, ყოველ რომელთაგანში, მიმდევრობით, ერთი მამრავლთაგანი განიხილება როგორც ცვლადი, დანარჩენები — როგორც მუდმივები.

ჩვენი მიზნისათვის, სახელდობრ საერთოდ y-ის დიფერენციალის შემდგომ გამოკვლევისათვის, B) ფორმა გამოსადეგი არ არის. დაუშვათ ამიტომ

$$u=x^4$$
$$z=x^3+ax^2,$$

---

[1] შავში: «რომ მცირეოდენი გამონაკლისით».

მაშინ

$$du = 4x^3 dx,$$
$$dz = (3x^2 + 2ax)\,dx,$$

როგორც ეს წინად ნაჩვენები იყო განტოლებისათვის მხოლოდ ერთი დამოკიდებული ცვლადით. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი du და dz *A*) განტოლებაში. მაშინ

$$A)\qquad \frac{dy}{dx} = (x^3 + ax^2)\,4x^3\frac{dx}{dx} + x^4\,(3x^2 + 2ax)\,\frac{dx}{dx},$$

მაშასადამე,

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 + ax^2)\,4x^3 + x^4\,(3x^2 + ax),$$

ამიტომ

$$dy = \{(x^3 + ax^2)\,4x^3 + x^4\,(3x^2 + ax)\}dx.$$

ბრჩხილებში მდგომი გამოსახულება არის uz-ის პირველი წარმოებული. მაგრამ რადგან $uz = f(x)$, მისი წარმოებული ტოლია $f'(x)$. თუ ეხლა ჩვენ ჩავსვამთ უკანასკნელს ალგებრული ფუნქციის ადგილას, მივიღებთ:

$$dy = f'(x)\,dx.$$

ჩვენ უკვე მივიღეთ იგივე შედეგი ნებსით განტოლებიდან მხოლოდ ერთი დამოკიდებული ცვლადით. მაგალითად:

$$y = x^m,$$
$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$
$$dy = f'(x)\,dx.$$

საერთოდ: თუ $y = f(x)$, არის ეს ფუნქცია x-ის (von x) რომელიღაც პირველადი ფუნქცია x-ში (in x), თუ შეიცავს დამოკიდებულ ცვლადებს, ყოველთვის $dy = df(x)$ და $df(x) = f'(x)\,dx$, ისე რომ

$$B)\qquad dy = f'(x)\,dx,$$

y-ის დიფერენციალის საყოველთაო (allgemeingültige) ფორმა.

II

1) დიფერენციალი

$$dy = f'(x)\,dx$$

თავიდანვე უფრო საეჭვოდ გამოიყურება, ვიდრე დიფერენციალური კოეფიციენტი $\frac{dy}{dx}=f'(x)$, რომლიდანაც ის გამოყვანილია.

$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$-ში მრიცხველი და მნიშვნელი განუყოფლად დაკავშირებულია ერთი მეორესთან; $dy=f'(x)\,dx$-ში ისინი გარეგნულად გაყოფილი არიან, ისე რომ ძალაუნებურად დაგებადება (aufdrängt) დასკვნა: $dy=f'(x)\,dx$ არის მხოლოდ შენიღბული გამოთქმა

$$0=f'(x)\cdot 0 \text{ ანუ } 0=0\text{-თვის},$$

რასთანაც ვერაფერს ვერ გააკეთებ («nix ze wolle»).

XIX ს. პირველი მესამედის ფრანგი მათემატიკოსი — ბუშარლა, რომელმაც სრულებით სხვა აზრით ნათლად, ვიდრე ცნობილმა[1] «ელეგანტმა» ფრანგმა, დააკავშირა დიფერენციალური მეთოდი ლაგრანჟის ალგებრულ მეთოდს — ამბობს: «თუ $\frac{dy}{dx}=3x^2$, მაგალითად, მაშინ $\frac{dy}{dx}$ alias $\frac{0}{0}$ ანუ უფრო სწორად მისი მნიშვნელობა $3x^2$ არის y ფუნქციის დიფერენციალური კოეფიციენტი. რადგან $\frac{dy}{dx}$ არის ამგვარად სიმბოლო, რომელიც წარმოადგენს ზღვარს (Grenze) $3x^2$, dx უნდა ყოველთვის (stets) იდგეს[2] dy-ის ქვეშ, მაგრამ ალგებრულ ოპერაციების გასაადვილებლად ჩვენ განვიხილავთ $\frac{dy}{dx}$, როგორც ჩვეულებრივ წილადს და $\frac{dy}{dx}=3x^2$, როგორც ჩვეულებრივ განტოლებას. მისი მნიშვნელიდან განთავისუფლებით, ჩვენ ვღებულობთ შედეგად გამოსახულებას $dy=3x^2\,dx$, რომელსაც ეწოდება y-ის დიფერენციალი».

ამგვარად, «ალგებრულ ოპერაციების გასაადვილებლად» შემოყავთ გარკვეულად არასწორი ფორმულა, რომელსაც ნათლავენ სახელით «დიფერენციალი».

ნამდვილად კაზუსი არ არის ამდენად ბოროტეული (bösartig). $\frac{0}{0}$-ში[3] მრიცხველი განუყოფელია მნიშვნელისაგან. მაგრამ რატომ?

---

[1] შავში: «შენთვის ცნობილმა».

[2] შავში არა stehen — იდგეს, არამედ stehen bleiben — დარჩეს.

[3] შავში «ფორმაში $\frac{0}{0}$».

რადგან მხოლოდ როგორც განუყოფელი ისინი გამოთქვამენ შეფარდებას, dans l'espèce [ამ შემთხვევა'ში] თავის აბსოლუტურ მინიმალურ გამოსახულებაზე დაყვანილ 'შეფარდებას $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$, სადაც მრიცხველი მხოლოდ იმის გამო გახდა ნული, რომ ნული გახდა მნიშვნელი. გაყოფილნი ისინი — ორივე ნულები, კარგავენ ამიტომ თავის სიმბოლიურ მნიშვნელობას, თავის აზრს.

მაგრამ როგორც კი $x_1 - x = 0$ ღებულობს dx-ში ფორმას, რომელიც უცვლელად წარმოადგენს (unänderlich manifestiert) მას, როგორც დამოუკიდებელ x ცვლადის გამქრალ სხვაობას, და მაშასადამე dy—გამქრალ სხვაობას x-ის ფუნქციის ან დამოკიდებული y-ის,—განცალკევება მნიშვნელის მრიცხველისაგან ხდება სრულებით დასაშვები (zulässige) ოპერაცია. სადაც ახლა არ იმყოფებოდეს dx, ასეთი ადგილის შეცვლა ხელუხლებლად ტოვებს dy-ის მასთან შეფარდებას. ამგვარად $dy = f_1'(x)\,dx$ წამოიწევა ჩვენს წინ [1] როგორც სხვა ფორმა

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)\text{-თვის}$$

და შეიძლება ყოველთვის შეცვლილი იყოს უკანასკნელით.

2) დიფერენციალი $dy = f'(x)\,dx$ მიღებული იყო A)-დან უშუალო ალგებრული გამოყვანის (Ableitung) გზით (იხ. I). მაგრამ A) განტოლების ალგებრულმა გამოყვანამ უკვე გვიჩვენა, რომ დიფერენციალური სიმბოლოები, — dans l'espèce სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტი, რომელნიც თავში ჩნდებიან, როგორც მხოლოდ სიმბოლიური გამოსახულებანი ალგებრულად შესრულებულ დიფერენცირების პროცესებისა, ერთნაირის აუცილებლობით (notwendig) გადაიქცევიან დამოუკიდებელ გამოსავალ პუნქტებად, განსახორციელებელ ოპერაციების სიმბოლოებად, ოპერატიულ სიმბოლიურად. ამის გამო ალგებრულ გზაზე გაჩენილი სიმბოლიური განტოლებანიც გარდაიქცევიან სიმბოლიურ ოპერატიულ განტოლებებად.

ამგვარად, ჩვენ ორმაგად გვაქვს უფლება განვიხილოთ დიფერენციალი, როგორც სიმბოლიური ოპერატიული განტოლება. ამასთანავე ჩვენ ვიცით ეხლა a priori, რომ თუ $dy = d\,f(x)$-ში $f(x)$-ზე შევასრულებთ $d\,f(x)$-ის საშუალებით მითითებული დიფერენციალურ

[1] შავში ნაცვლად «ჩვენ წინ» — «მხოლოდ».

ოპერაციას, შედეგი იქნება: $dy=f'(x)\,dx$ და აქედან საბოლოოდ მიიღება:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x).$$

მაგრამ მხოლოდ იმ მომენტიდან, როცა დიფერენციალი მოქმედებს (funktioniert), როგორც აღრიცხვის გამოსავალი პუნქტი, დასრულებულია (vollendet) დიფერენცირების ალგებრული მეთოდის შებრუნება, და ამიტომ თვით დიფერენციალური აღრიცხვა წარმოგვიდგება როგორც გარკვეული სრულებით განსაკუთრებული (apart), სპეციფიური აღრიცხვა ცვლადი სიდიდეებით.

იმისათვის, რომ ეს უფრო თვალსაჩინოდ გავხადო, შევაჯამებ ზოგადი სახით ჩემს მიერ გამოყენებულ ალგებლურ მეთოდს, შევცვლი რა გარკვეულ ალგებრულ გამოსახულებებს x-ში (in x) $f(x)$-ით და აღვნიშნავ «წინასწარ წარმოებულს» (იხ. პირველი მანუსკრიპტი) $f^1(x)$-ით, საბოლოო $f'(x)$ «წარმოებულისაგან» განსხვავებით. მაშინ, თუ

$$f(x)=y,$$
$$f(x_1)=y_1,$$
$$f(x_1)-f(x)=y_1-y \text{ ანუ } \Delta y$$
$$f^1(x)(x_1-x)=y_1-y \text{ ანუ } \Delta y.$$

წინასწარი წარმოებული $f^1(x)$, ისევე როგორც მისი მამრავლიც x_1-x, უნდა[1] შეიცავდეს გამოსახულებებს x_1 და x-ში ერთად ერთი გამონაკლისის გარდა, როცა $f(x)$ არის პირველადი ფუნქცია **პირველი ხარისხისა.**

$$f^1(x)=\frac{y_1-y}{x_1-x} \text{ ანუ } \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

თუ მივიღებთ ეხლა $f^1(x)$-ში

$$x_1=x, \text{ მაშასადამე } x_1-x=0,$$

გვექნება $$f'(x)=\frac{0}{0} \text{ ანუ } \frac{dy}{dx}$$

და საბოლოოდ $f'(x)\,dx=dy$ ანუ $dy=f'(x)\,dx.$

y-ის დიფერენციალი არის ამგვარად ალგებრული განვითარების

[1] შავში «უნდა, როგორც წესი».

საბოლოო პუნქტი (Schlusspunkt); ის ხდება გამოსავალი პუნქტი თავის საკუთარ ნიადაგზე მოძრავ დიფერენციალურ აღრიცხვისა. dy, განცალკევებულად განხილული, ე. ი. თავის ექვივალენტის გარეშე—y-ის დიფერენციალური ნაწილაკი (die Differentielle von y[1]) თამაშობს აქ ერთბაშად იმავე როლს, რასაც Δy ალგებრულ მეთოდში, x-ის დიფერენციალური ნაწილაკი (die Differentielle von x) dx—იმავეს, რასაც იქ Δx.

ჩვენ რომ გაგვეთავისუფლებინა $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f^1(x)$ მისი მნიშვნელისაგან, მივიღებდით

1) $$\Delta y=f^1(x)\,\Delta x.$$

პირიქით, დიფერენციალურ აღრიცხვიდან, როგორც მზა, განსაკუთრებულ (apart) აღრიცხვიდან (Rechnungsart) გამოსვლით — და ეს გამოსავალი პუნქტი თითონ იყო გამოყვანილი ალგებრულად, — ჩვენ ერთბაშად ვიწყებთ I განტოლების დიფერენციალურ გამოსახულებიდან, სახელდობრ:

II) $$dy=f'(x)\,dx.$$

3) რადგან დიფერენციალის სიმბოლიური განტოლება ჩნდება უკვე ერთი დამოუკიდებელ ცვლადის ელემენტარულ ფუნქციების ალგებრულ განხილვისას (algebraische Behandlung), შეიძლება გვეჩვენოს, რომ გადატრიალება მეთოდში შეიძლება ყოფილიყო განვითარებული ბევრად უფრო მარტივად, ვიდრე ეს მოხდა მაგალითზე $y=uz$. ყველაზე ელემენტარული ფუნქციები არიან პირველი ხარისხის ფუნქციები, სახელდობრ:

a) $y=x$, რაც გვაძლევს დიფერენციალურ კოეფიციენტს $\frac{dy}{dx}=1$, მაშასადამე დიფერენციალი $dy=dx$;

b) $y=x\pm ab$, რაც გვაძლევს დიფერენციალურ კოეფიციენტს $\frac{dy}{dx}=1$, მაშასადამე კვლავ დიფერენციალი $dy=dx$.

---

[1] მარქსი განასხვავებს დიფერენციალურ ნაწილაკებს dx და dy (die Differentiellen), რომელნიც წარმოადგენენ მოხსნილ სხვაობებს Δx და Δy, და დიფერენციალს (das Differential) $dy=f'(x)\,dx$, როგორც სხვა ფორმას გამოსახულებისათვის

$$\frac{dy}{dx}=f'(x).$$

c) $y=ax$, რაც გვაძლევს დიფერენციალურ კოეფიციენტს $\frac{dy}{dx}=a$, მაშასადამე დიფერენციალი $dy=adx$.

განვიხილოთ უმარტივესი შემთხვევა (sub a). მაშინ

$$y=x,$$
$$y_1=x_1,$$
$$y_1-y \text{ ანუ } \Delta y=x_1-x \text{ ანუ } \Delta x.$$

I) $\frac{y_1-y}{x_1-x}$ ანუ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$, მაშასადამე აგრეთვე $\Delta y=\Delta x$. თუ ეხლა $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-ში მივიღებთ $x_1=x$ ანუ $x_1-x=0$, მაშინ

II) $\frac{0}{0}$ ანუ $\frac{dy}{dx}=1$; მაშასადამე $dy=dx$.

თავიდანვე, როგორც კი მიღებულია I ე. ი. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$, ჩვენ იძულებული ვართ ვიმოქმედოთ შემდეგში განტოლების მარცხენა მხარეზე, რადგან მარჯვენა დაკავებულია მუდმივით. მაგრამ ამით გ ა დ ა ტ რ ი ა ლ ე ბ ა მ ე თ ო დ შ ი, რომელსაც გადაყავს ინიციატივა მარჯვენა მხარიდან მარცხენაზე, გვეჩვენება როგორც თავიდანვე ერთხელ და სამუდამოდ დამტკიცებული, ნ ა მ დ ვ ი ლ ა დ პ ი რ ვ ე ლ ი ს ი ტ ყ ვ ა თ ვ ი თ ა ლ გ ე ბ რ უ ლ მ ე თ ო დ ი ს ა.

უფრო ახლოს დავაკვირდეთ საქმეს.

ნამდვილი შედეგი იყო:

I) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=1;$$

II) $$\frac{0}{0} \text{ ანუ } \frac{dy}{dx}=1.$$

რადგან ორივეს, I და II, მივყევართ ერთსადაიმავე შედეგისაკენ, ჩვენ შეგვიძლია ავარჩიოთ მათ შორის.

ყოველ შემთხვევაში დაშვება $x_1-x=0$ გვეჩვენება ზედმეტ, და ამიტომ ნებსით ოპერაციად. ამის გარდა ვიმოქმედებთ რა II განტოლებაზე, მისი მარცხენა მხარიდან გამოსვლით, რადგან მარჯვენა მხარეზე არაფერია გასაკეთებელი («nix ze wolle»), ჩვენ მივიღებთ

$$\frac{0}{0} \text{ ანუ } \frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

საბოლოო შედეგი იქნებოდა, რომ $\frac{0}{0}=0$ და ამიტომ მეთოდი, რომლის საშუალებით იყო მიღებული $\frac{0}{0}$, შემცდარია. პირველ ნაბიჯისას ის არაფერ ახალისაკენ არ მიგვიყვანს, მეორე ნაბიჯისას კი მიგვიყვანს არაფრისაკენ. დაბოლოს, ჩვენ ვიცით ალგებრიდან, რომ თუ ორი განტოლების მეორე მხარეები იგივური არიან, პირველი მხარეებიც აგრეთვე უნდა იგივური იყვნენ. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

მაგრამ რადგან x და მისგან დამოკიდებული y ორივე ცვლადი სიდიდეებია, ამიტომ Δx-ს, სასრულო სხვაობად დარჩენით, შეუძლია ამავე დროს უსასრულოდ მცირდებოდეს, სხვა სიტყვებით, ნულთან მივიდეს რაგინდ ახლოს ე. ი. გახდეს უსასრულოდ მცირე, ისევე როგორც მასზე დამოკიდებული Δy. შემდეგ, $\frac{dy}{dx}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$-დან გამომდინარეობს, რომ $\frac{dy}{dx}$ სინამდვილეში აღნიშნავს არა ექსტრავაგანტურ $\frac{0}{0}$-ს, არამედ, პირიქით, არის სადღესასწაულო მოკაზმულობა (Sonntagsuniform) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-თვის, რამდენადაც ეს უკანასკნელი წარმოგვიდგება როგორც უსასრულოდ მცირე სხვაობების შეფარდება, ე. ი. სხვაგვარად, ვიდრე ჩვეულებრივ სხვაობათა აღრიცხვაში (Differenzenrechnung).

დიფერენციალი (das Differential) $dy=dx$ თავის მხრივ მოკლებულია ყოველგვარ აზრს; ან, უფრო სწორად, აქვს სწორედ იმდენივე აზრი, რამდენიც ჩვენ აღმოვაჩინეთ ორივე დიფერენციალურ ნაწილაკში (Differentiellen) $\frac{dy}{dx}$-ის ანალიზირებით. ჩვენ რომ აგვეღო ეს უკანასკნელი მისთვის ესეს არის მინიჭებულ მნიშვნელობით, ჩვენ უკვე შეგვეძლო შეგვესრულებინა დიფერენციალზე გასაოცარი ოპერაციები (Wunderoperationen), როგორც ამას გვიჩვენებს მაგალითად $a\,dx$-ის როლი პარაბოლის მხებქვეშას განმარტებისას. მაგრამ

ამისათვის სრულებით არაა საჭირო ნამდვილი გაგება dx და dy-ის ბუნებისა.

4) სანამ მე III ნაწილზე გადავალ, რომელიც ძალიან შემოკლებული სახით იძლევა მონახაზს დიფერენციალურ აღრიცხვის განვითარების ისტორიულ მსვლელობისა, კიდევ ერთი მაგალითი აქამდე გამოყენებულ ალგებრულ მეთოდზე [შემდეგ მარქსი ახდენს დიფერენციაციას რთული ფუნქციისა, რომელიც განტოლებებით $y=3u^2$, $u=x^3+ax^2$ არის მოცემული, და აჩვენებს, დამოკიდებულების $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ გამოყენებით, რომელსაც ცალკე არ ამტკიცებს (როგორც სჩანს, უკვე დასაბუთებულად მიაჩნია უფლება იმოქმედოს $\frac{dy}{dx}$-ზე, როგორც ჩვეულებრივ წილადზე), რომ რთული ფუნქციის $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$-ის წარმოებული არის წარმოებულების $f'(u)$ და $\varphi'(x)$ ნამრავლი ... შესაფერისი ადგილი მოყვანილია ვარიანტში, იხ. გვ. 40 — 43)].

III. ამ მეორე ნაკვეთის დასასრული იმის შემდეგ იქნება, რაც ნახული იქნება მუზეუმში ჯონ ლანდენი.

დამატებითი შენიშვნები ნამრავლის დიფერენცირებაზე [1]

duz-ის მონახვისას უკანასკნელ მანუსკრიპტში ჩემთვის არსებითი იყო, რაც შეეხება განტოლებას $A)$ $\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}$, ჩვენება იმისა, თუ როგორ ალგებრული მეთოდი თვით გარდაიქმნება დიფერენციალურში, იმის გამო, რომ „წარმოებულის" შიგნით ე. ი. მარჯვენა მხარეზე ჩნდებიან სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტები, რომელნიც, როგორც ასეთები, ხდებიან უკვე დამოუკიდებელ გამოსავალ პუნქტებად და მზა ოპერატიულ ფორმულებად.

$A)$ განტოლების ფორმა მით უფრო შესაფერისად გვეჩვენებოდა ამ მიზნისათვის, რომ ის შედარების საშუალებას იძლეოდა $\frac{du}{dx}$ და

[1] სათაური ეკუთვნის მარქსს. ქვემოთ მოყვანილი ნაწყვეტი წარმოადგენს პირველს ამ სათაურით გაერთიანებულ სამ პუნქტთაგანს. ჩვენ მოგვყავს ის, როგორც მოკლეთ შემჯამავი ძირითადი შრომისა დიფერენციალის შესახებ. დანარჩენი ორი პუნქტი, რომელიც გამოთვლების დეტალებს შეიცავს, გამოტოვებულია.

$\frac{dz}{dx}$-ის, რომელნიც ჩნდებიან $f'(x)$-ის შიგნით, და $\frac{dy}{dx}$-ის მარცხენა მხარეზე, რომელიც წარმოადგენს სიმბოლიურ დიფერენციალურ კოეფიციენტს, და ამიტომ სიმბოლიურ ეკვივალენტს $f'(x)$-თვის.

რაც შეეხება ხასიათს $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, როგორც ოპერატიულ ფორმულებისა, მე დავკმაყოფილდი მითითებით, რომ ამ დიფერენციალურ კოეფიციენტებისათვის შეიძლება მიღებული იყოს ყოველგვარი „წარმოებულები“ ანუ რეალური მნიშვნელობანი, თუ u-ს ნაცვლად ჩავსვამთ ნებისმიერ $f(x)$, მაგალითად $3x^3$, z ის ნაცვლად ნებისმიერ $\psi(x)$, მაგალითად $x^3 + ax^2$.

მაგრამ მე შემეძლო აგრეთვე მიმეთითებინა ამ ოპერატიულ ფორმულების გეომეტრიულ გამოყენებადობაზე, რამდენადაც მაგალითად *საერთო ფორმულა მრუდთა მხებქვეშებისათვის არის* $y\frac{dx}{dy}$, რაც სრულებით იდენტური არის ფორმით $z\frac{du}{dx}$, ვინაიდან ისინი არიან ნამრავლები გარკვეულ ცვლადის სიმბოლიურ დიფერენციალურ კოეფიციენტზე.

დაბოლოს შეგვეძლო კიდევ შეგვენიშნა, რომ $y=uz$ არის *უმარტივესი ელემენტარული ფუნქცია*, რომელზედაც შეიძლება განვითარებული იყოს ჩვენი თემა.

ვარიანტი შრომისა დიფერენციალის შესახებ[1]

ჩვენ გამოვდიოდით $f'(x)$-ის ალგებრულ გამოყვანისაგან, რომ ამით ერთდროულად გამოგვევლინა მისი სიმბოლიური დიფერენციალური გამოსახულება $\frac{0}{0}$ ანუ $\frac{dy}{dx}$ მის წარმოშობაში და ამგვარად გაგვერკვია მისი აზრი. ეხლა ჩვენ შებრუნებით უნდა გამოვიდეთ სიმბოლიურ დიფერენციალურ კოეფიციენტებისაგან $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, როგორც მოცემული ფორმულებისაგან, რომ მოვნახოთ მათი შესაბამისი რეალური ეკვივალენტები $f'(x)$, $\varphi'(x)$. და ამასთანავე ეს სხვადასხვა ხერხები დიფერენციალური აღრიცხვის განხილვისა, რომელნიც საწინააღმდეგო პოლუსებიდან გამოდიან და ახასიათებენ ორ განსხვავებულ ისტორიულ სკოლას, გაჩნდა არა ჩვენი სუბიექტური მეთოდის შეცვლით, არამედ განსახილველად აღებულ uz ფუნქციის

[1] არის მხოლოდ შავში. პირველი ოთხი გვერდი აკლია.

ბუნებისაგან. ჩვენ განვიხილავთ მას, როგორც ვიხილავდით x-ის ფუნქციას მხოლოდ ერთი დამოკიდებული ცვლადით, როცა გამოვდიოდით პოლუსიდან მარჯვენა მხარეზე და ალგებრულად მასზე ვმოქმედებდით. მე არ ვფიქრობ, რომ რომელიმე მათემატიკოსს — ისეთ ელემენტარულ ფუნქციაზე, როგორიცაა uz, ან რომელიც არ უნდა იყოს სხვა ფუნქციაზე, — გამოერკვია ან შეენიშნა მაინც აუცილებლობა ამ გადასვლისა პირველ ალგებრულ მეთოდიდან (ისტორიულად მეორიდან). ამისათვის ისინი ნამეტანი იყვნენ აღრიცხვის მასალით გართული.

სინამდვილეში ჩვენ ვხედავთ, რომ, განტოლებაში

$$\frac{0}{0} \text{ ანუ } \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

$\frac{dy}{dx}$ სრულებით ისევე გაჩნდა პროცესიდან, რომელიც მარჯვნივ ხდება uz-ზე, როგორც ამას ადრე ადგილი ჰქონდა x-ის ფუნქციისათვის მხოლოდ ერთი დამოკიდებული ცვლადით, მაგრამ, მეორეს მხრით თვით $f'(x)$-ში, ან uz-ის პირველ წარმოებულში, თავის მხრივ აღმოჩნდნენ ჩართული დიფერენციალური სიმბოლოები $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, რომელნიც ამის გამო არიან $\frac{dy}{dx}$-თვის ექვივალენტის ელემენტები. ამგვარად თვით სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტები თავის მხრით გახდნენ უკვე საგანი ან შინაარსი დიფერენციალურ ოპერაციის, იმის ნაცვლად, რომ, როგორც წინად, ფიგურირებდნენ მხოლოდ როგორც მისი სიმბოლიური შედეგი.

ამ ორ პუნქტთან ერთად, — პირველად, რომ სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტები[1], ცვლადების თანაბრად, თითონ თავის მხრით ხდებიან წარმოებულის შინაარსობრივ ელემენტებად, დიფერენციალურ ოპერაციების საგნებად, მეორედ, რომ შეტრიალებულია საკითხის დაყენება და, ნაცვლად რეალურ დიფერენციალურ კოეფიციენტებისათვის $[f'(x)]$ სიმბოლიურ გამოსახულების მოძებნისა, რეალურ დიფერენციალურ კოეფიციენტს ეძებენ მის სიმბოლიურ გამოსახულების მიხედვით — ამ ორ პუნქტთან ერთად მოცემულია მესამეც სახელდობრ, რომ სიმბოლიური დიფერენციალური გამოსახულებანი ჩნდებიან არა რო-

[1] მარქსთან წერის შეცდომაა—„სიმბოლოები".

გორც სიმბოლიური შედეგი x-ის ნამდვილ ფუნქციებზე წარმოებულ დიფერენციალურ ოპერაციებისა, არამედ, პირიქით, თამაშობენ ახლა სიმბოლოების როლს, რომელნიც მიუთითებენ დიფერენციალურ ოპერაციებზე, რომელნიც ჯერ კიდევ უნდა შესრულებული იყვნენ x-ის რეალურ ფუნქციაზე ე. ი. რომ ეს გამოსახულებანი ხდებიან ამგვარად ო პ ე რ ა ტ ი უ ლ ს ი მ ბ ო ლ ო ე ბ ა დ. ჩვენს შემთხვევაში, სადაც

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx},$$

ჩვენ შეგვეძლო შემდგომი მოქმედება მხოლოდ მაშინ, თუ გვეცოდინებოდა არა მარტო ის, რომ u და z ორივე x-ის ფუნქციებია, არამედ თუ, როგორც $y = x^m$-ის შემთხვევაში, u და z-თვის იქნებოდენ მოცემული ნამდვილი მნიშვნელობანი x-ში, მაგალითად $u = \sqrt{x}$, $z = x^3 + 2ax^2$. ამგვარად $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ დგანან აქ ნამდვილად როგორც ოპერაციების მაჩვენებლები, რომლების შესრულების ხერხი იგულისხმება ცნობილად x-ის ნებსით ფუნქციისათვის, რომელიც შეიძლება ჩასმული იყოს u და z-ის ნაცვლად. მონახული განტოლება არის არა მარტო სიმბოლიური ოპერატიული განტოლება, არამელ [ჯერ] მხოლოდ მოსამზადებელი სიმბოლიური ოპერატიული განტოლება. რადგან

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}\text{-ში}$$

მნიშვნელი dx მოთავსებულია ყველა წევრში ორივე მხარეზე, მიყვანილი გამოსახულება ამ განტოლებისა არის:

$$\text{II)}\ dy \text{ ანუ } duz = z\,du + u\,dz.$$

უშუალოდ ეს განტოლება ლაპარაკობს, რომ ორი ნებსით ცვლადის ნამრავლის დიფერენცირებისათვის (რაც შემდგომ გამოყენებებში შეიძლება განზოგადოებული იყოს ცვლადთა ნებსით რიცხვის ნამრავლზე) უნდა გადავამრავლოთ თითოეული ორ მამრავლთაგანი მეორის დიფერენციალზე და შევკრიბოთ მიღებული ორი ნამრავლი.

ამგვარად, ორი ცვლადის ნამრავლის დიფერენცირებისას პირველი ოპერატიული განტოლება $\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$, როგორც მოსამზადებელი, ზედმეტი ხდება იმის შემდეგ, რაც მან შეასრულა თავისი

დანიშნულება — მოეწოდებინა დიფერენცირების ზოგადი სიმბოლიური ფორმულა, რომელსაც პირდაპირ მივყევართ მიზნისაკენ.

და აქ უნდა აღინიშნოს, რომ ალგებრული გამოყვანის საწყისი ხერხი თავის საწინააღმდეგოში გადავიდა. იქ ჩვენ თავიდან ვღებულობთ $\Delta y = y_1 - y$, როგორც სიმბოლოს, რომელიც ეთანადება $f(x_1) - f(x)$, სადაც ორივე [ფუნქცია] არის ჩვეულებრივი ალგებრული გამოსახულებანი (რადგან $f(x)$ და $f(x_1)$ მოცემული იყვნენ x-ის გარკვეულ ალგებრულ ფუნქციების სახით).

შემდეგ $\dfrac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ გამოსახული იყო სახით $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ და მერე $f'(x)$ (x-ის პირველი წარმოებული ფუნქცია)—სახით $\dfrac{dy}{dx}$; და მხოლოდ საბოლოო განტოლებიდან დიფერენციალურ კოეფიციენტისათვის $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ ჩვენ ვღებთ დიფერენციალს

$$dy = f'(x)\,dx.$$

პირიქით, ზემოთ მიღებული განტოლება გვაწვდის დიფერენციალებს, როგორც გამოსავალ პუნქტებს. სახელდობრ, თუ ჩვენ შევცვლით u და z x-ის რაიმე გარკვეული ნამდვილ ალგებრულ ფუნქციებით, რომლებსაც ჩვენ მხოლოდ აღვნიშნავთ: $u = f(x)$ და $z = \varphi(x)$, მაშინ

$$dy = \varphi(x)\,df(x) + f(x)\,d\varphi(x),$$

და ეს d მიუთითებენ დიფერენცირებაზე, რომელიც შესრულებული უნდა იყოს.

ამ დიფერენცირების შედეგს აქვს ზოგადი ფორმა:

$$df(x) = f'(x)\,dx,$$

და

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx.$$

ამგვარად

$$dy = \varphi(x)\,f'(x)\,dx + f(x)\,\varphi'(x)\,dx,$$

და ბოლოს

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\,f'(x) + f(x)\,\varphi'(x).$$

აქ, სადაც დიფერენციალი თამაშობს უკვე მზა ოპერატიულ სიმბოლოს როლს, ჩვენ გამოგვყავს მაშასადამე დიფერენციალური კოე-

ფიციენტები მისგან, იმ დროს როცა პირვანდელ ალგებრულ განვითარებაში, პირიქით, დიფერენციალი მიღებული იყო განტოლებიდან დიფერენციალურ კოეფიციენტებისათვის.

განვიხილოთ თითონ დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ ი როგორც ის ჩვენ მივიღეთ მისი უმარტივესი ფორმით, სახელდობრ პირველი ხარისხის ფუნქციიდან:

$$y=ax$$

$$\frac{dy}{dx}=a,$$

აქედან დიფერენციალი:

$$dy=a\,dx.$$

ამ დიფერენციალების განტოლება უფრო საეჭვოთ გვეჩვენება, ვიდრე განტოლება დიფერენციალურ კოეფიციენტისათვის $\frac{0}{0}$ ანუ $\frac{dy}{dx}$, საიდანაც ისინი გამოყვანილია.

რადგან $dy=0$ და $dx=0$, ამიტომ $dy=a\,dx$ იდენტურია $0=0$-ის, და, მიუხედავად ამისა, ჩვენ სრული უფლება გვაქვს გამოვიყენოთ dy და dx, ნაცვლად გამქრალი, მაგრამ ამ სიმბოლოების საშუალებით თავის გაქრობაში დაფიქსირებული, სხვაობებისა y_1-y, x_1-x.

რამდენადაც არ მივდივართ გამოსახულების

$$dy=a\,dx$$

ან საერთოდ

$$dy=f'(x)\,dx$$

შორის, ის სხვა არაფერია, ვიდრე ერთგვარი სხვა ჩანაწერი იმ ფაქტისა, რომ $\frac{dy}{dx}=f'(x)$, ჩვენს შემთხვევაში$=a$, რის გამო ჩვენ ყოველთვის საშუალება გვაქვს ისევ გარდავქმნათ ის ამ უკანასკნელ ფორმად. მაგრამ ეს გადაქცევის უნარი ხდის მას ოპერატიულ სიმბოლოდ. ჩვენ ვხედავთ ერთბაშად, რომ თუ ჩვენ მოვნახეთ როგორც დიფერენცირების პროცესების შედეგი $dy=f'(x)\,dx$, ჩვენთვის საჭიროა მხოლოდ გავყოთ ორივე მხარე dx-ზე იმისათვის, რომ მოვნახოთ დიფერენციალური კოეფიციენტები $\frac{dy}{dx}=f(x)$.

ასე მაგალითად $y^2=ax$-ში

$$dy^2=d\,ax,$$
$$2y\,dy=a\,dx.$$

უკანასკნელი განტოლება დიფერენციალებში გვაძლევს ჩვენ ორ განტოლებას დიფერენციალურ კოეფიციენტებში, სახელდობრ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{2y} \text{ და } \frac{dx}{dy}=\frac{2y}{a}.$$

მაგრამ [განტოლება] $2y\,dy=a\,dx$ უშუალოდ გვაძლევს dx-თვის მნიშვნელობას $\frac{2ydy}{a}$ და ხდება ამგვარად ოპერატიულ საშუალებად, რომელიც გვეხმარება ჩვენ, ჩასმული მაგალითად მხებქვეშას საერთო ფორმულაში $y\,\frac{dx}{dy}$, მოვძებნოთ საბოლოოდ ჩვეულებრივი პარაბოლის მხებქვეშას მნიშვნელობისათვის სიდიდე $2x$, გაორკეცებული აბსცისი.

II

ავიღოთ ეხლა მაგალითი, რომელშიაც ჯერ სიმბოლიური გამოსახულებანი გვემსახურებიან აღრიცხვის მზა ოპერატიულ ფორმულებათ და, მაშასადამე საჭიროა მოინახოს სიმბოლიურ დიფერენციალურ კოეფიციენტის რეალური მნიშვნელობა, და შემდეგ მოვახდენთ მოპირისპირე ელემენტარულ ალგებრულ გადაცემას.

1) დამოკიდებული ფუნქცია y და დამოუკიდებელი ცვლადი x დაკავშირებული არიან არა ერთი განტოლებით, არამედ ისე, რომ y მონაწილეობს რომელიღაც განტოლებაში უშუალოთ, როგორც u ცვლადის ფუნქცია, ხოლო u — რომელიღაც სხვა განტოლებაში უშუალოთ როგორც ფუნქცია x ცვლადის. ამოცანა: მოინახოს რეალური მნიშვნელობა სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტის $\frac{dy}{dx}$.

ვთქვათ $a)$ $y=f(u)$, $b)$ $u=\varphi(x)$.

ჯერ 1) $y=f(u)$ გვაძლევს

$$\frac{dy}{du}=\frac{df(u)}{du}=\frac{f'(u)\,du}{du}=f'(u).$$

2) $$\frac{du}{dx}=\frac{d\varphi(x)}{dx}=\frac{\varphi'(x)\,dx}{dx}=\varphi'(x).$$

მაშასადამე:

$$\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\,\varphi'(x).$$

მაგრამ

$$\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}.$$

მაშასადამე

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

მაგალითად, თუ $a)$ $y=3u^2$, $b)$ $u=x^3+ax^2$, მაშინ, ფორმულით,

$$\frac{dy}{du}=\frac{d3u^2}{du}=6u\,(=f'(u)).$$

მაგრამ განტოლება $b)$ გვაძლევს $u=x^3+ax^2$. ჩავსვათ u-ს ეს მნიშვნელობა $6u$-ში, მაშინ

$$\frac{dy}{du}=6(x^3+ax^2)(=f'(u)).$$
$$\frac{du}{dx}=3x^2+2ax\,(=\varphi'(x)).$$

მაშასადამე:

$$\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \text{ ანუ } \frac{dy}{dx}=6\,(x^3+ax^2)\,(3x^2+2ax)\,(=f'(u)\cdot\varphi'(x)).$$

2) ჩვენ ვღებულობთ, როგორც გამოსავალს, განტოლებებს, რომლებსაც უკანასკნელი მაგალითი შეიცავს, იმ მიზნით, რომ მათი დიფერენციაცია მოვახდინოთ პირველ ალგებრულ მეთოდით.

$a)$ $y=3u^2$, $b)$ $u=x^3+ax^2$.

რადგან

$$y=3u^2$$
$$y_1=3u_1^2,\ \ y_1-y=3\,(u_1^2-u^2)=3\,(u_1-u)\,(u_1+u),$$

აქედან

$$\frac{y_1-y}{u_1-u}=3\,(u_1+u).$$

ეხლა თუ მივიღებთ $u_1-u=0$, მაშასადამე, $u_1=u$, მაშინ $3\,(u_1+u)$ გადაიქცევა $3\,(u+u)=6u.$

ჩავსვათ u-ს ნაცვლად მისი მნიშვნელობა b) განტოლებიდან; მაშინ

$$\frac{dy}{du}=6(x^3+ax^2).$$

შემდეგ, რადგან

$$u=x^3+ax^2,\ u_1=x_1^3+ax_1^2,$$

ამიტომ

$$u_1-u=(x_1^3+ax_1^2)-(x^3+ax^2)=(x_1^3-x^3)+a(x_1^2-x^2)=$$
$$=(x_1-x)(x_1^2+x_1x+x^2)+a(x_1-x)(x_1+x),$$

მაშასადამე

$$\frac{u_1-u}{x_1-x}=x_1^2+x_1x+x^2+a(x_1+x).$$

თუ ახლა მივიღებთ $x_1-x=0$, მაშასადამე $x_1=x$, მაშინ

$$x^2+xx+x^2=3x^2$$

და

$$a(x+x)=2ax.$$

მაშასადამე

$$\frac{dy}{dx}=3x^2+2ax.$$

მარჯვენა მხარეზე მდგომ ორი ფუნქციის გადამრავლებით მივიღებთ $6(x^3+ax^2)(3x^2+2ax)$, რასაც მარცხნივ ეთანადება

$$\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx},$$

ე. ი. იგივე, რაც წინად.

თავის თავად იგულისხმება, რომ პირველი სხვაობის $f(x_1)-f(x)$ ისეთ წევრებად დაშლის გაჭიანურებულობის და ხშირად გაძნელებულობის გამო, ყოველი რომელთაგანი შეიცავს x_1-x მამრავლს, უკანასკნელი მეთოდი, როგორც საანგარიშო ინსტრუმენტი, შეუდარებელია ისტორიულად წინად დამყარებულთან. მაგრამ, მეორეს

მხრით, უკანასკნელში გამოდიან dy, dx, $\frac{dy}{dx}$-დან, როგორც მოცემულ ოპერატიულ ფორმულებიდან, იმ დროს როცა პირველში სჩანს მათი — და ამასთანავე წმინდა ალგებრული, — წარმოშობა. არაფერ სხვას მე არ ვამტკიცებ. მაგრამ როგორ იყო იქ, პირველ [ისტორიულად] მეთოდში, მიღებული გამოსავალი პუნქტი დიფერენციალურ სიმბოლოებისათვის, როგორც ოპერატიულ ფორმულებისათვის? ცხად ან ფარულ მეტაფიზიკურ წინამძღვრების საშუალებით, რომლებსაც თავის მხრით მივყავართ მეტაფიზიკურ, არამათემატიკურ დასკვნებისაკენ: ჩნდება ნაძალადევი ამოშლა ზოგიერთ გამოყვანის გზაზე მდგომ და ამავე დროს თვით მისგანვე გაჩენილ სიდიდეების.

იმ მიზნით, რომ ისტორიულ მაგალითზე იყოს დემონსტრირებული განსხვავება საწინააღმდეგო პოლუსებიდან გამომავალ ორივე მეთოდისა, მე დაუპირისპირებ ზემოთ გადმოცემულ შემთხვევის duz გადაწყვეტას ნიუტონის და ლეიბნიცის მიერ, ერთის მხრით, ლაგრანჟის — მეორეს მხრით.

1) ნიუტონი

ყველაზე ადრე ჩვენ გვეუბნებიან, რომ თუ ცვლადი სიდიდეები იზრდებიან, $\dot{x}$, $\dot{y}$ და ა. შ. აღნიშნავენ სიჩქარეებს მათი დენის[1], alias x, y და ა. შ. შესაბამის ზრდისა. მაგრამ რადგან, შემდეგ, რიცხვობრივი მნიშვნელობანი ყველა სიდიდეების შეიძლება წარმოდგენილი იყოს სწორი ხაზებით[2], ამიტომ მომენტები, რომელიც წარმოიშობიან, ანუ უსასრულოდ მცირე სიდიდენი ტოლნი არიან $\dot{x}$, $\dot{y}$ და ა. შ. სიჩქარეების ნამრავლისა დროის უსასრულოდ მცირე ნაწილაკზე τ, რომლის განმავლობაშიც ისინი ხანგრძლივობენ, მაშასადამე $=\dot{u}\tau$, $\dot{x}\tau$, $\dot{y}\tau$[3].

განვიხილოთ y-ის დიფერენციალი მისი ზოგადი ფორმით: $dy = f'(x)dx$. აქ ჩვენს წინ უკვე წმინდა სიმბოლიური ოპერატიული განტოლებაა, იმ შემთხვევაშიაც კი, როცა $f'(x)$ თავიდანვე არის

[1] მარქსთან წერის შეცდომა: „ფლუქსიების".

[2] იხ. შენიშვნა 2 გვ. 62.

[3] აქ ტექსტი წყდება როგორც სჩანს იმის გამო, რომ, როგორც შემდგომიდან ირკვევა (იხ. გვ. 46), მარქსმა გადაწყვიტა ისტორიულ განვითარების განხილვას მიუძღვნის ამ შრომის ცალკე (IV) ნაწილი. ჯერ კი მარქსი კვლავ უბრუნდება დიფერენციალებს.

მუდმივი, როგორც $dy = d\,ax = a\,dx$. ეს ბავშვი [დიფერენციალურ კოეფიციენტის] $\frac{0}{0}$ ანუ $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ უფრო საეჭვოთ გამოიყურება, ვიდრე მისი დედა. ეს რადგან $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$-ში მნიშვნელი და მრიცხველი განუყრელად დაკავშირებული არიან, $dy = f'(x)\,dx$-ში ისინი შესახედავად განცალკევებული არიან, ისე, რომ დაგებადება დასკვნა: $dy = f'(x)\,dx$ არის მხოლოდ შენიღბული გამოსახულება $0 = f'(x) \cdot 0$ და მაშასადამე, $0 = 0$-თვის, ხოლო ამას ვერაფერს ვერ უზამ („nichts zu wolle"). შემდგომი ანალიტიკოსები, რომელნიც ჩვენ საუკუნეს ეკუთვნიან, როგორც მაგალითად ფრანგი ბუშარლა აგრეთვე გრძნობენ, რომ აქ საქმე რიგზე არაა. ის ამბობს „$\frac{dy}{dx} = 3x^2$-ში, მაგალითად $\frac{0}{0}$ alias $\frac{dy}{dx}$, ან, უფრო სწორედ, მისი მნიშვნელობა $3x^2$ არის y ფუნქციის დიფერენციალური კოეფიციენტი. რადგან $\frac{dy}{dx}$ არის ამგვარად სიმბოლო, რომელიც წარმოადგენს ზღვარს (Grenze) $3x^2$, ამიტომ dx ყოველთვის უნდა იდგეს dy-ის ქვეშ. მაგრამ ალგებრულ ოპერაციების გასაადვილებლად ჩვენ განვიხილავთ $\frac{dy}{dx}$ როგორც ჩვეულებრივ წილადს, და $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, როგორც ჩვეულებრივ განტოლებას, რის გამოც გამოდის, განტოლების dx მნიშვნელისაგან განთავისუფლებით, შედეგი $dy = 3x^2\,dx$, რომელ გამოსახულებასაც ეწოდება y-ის დიფერენციალი".

ამგვარად, „ალგებრულ ოპერაციების გასაადვილებლად" ჩვენ არასწორი ფორმულა შემოგვყავს.

ნამდვილად საქმე ასე არაა. $\frac{0}{0}$-ში, სწორედ რომ ვოქვად უნდა დაიწეროს $\left(\frac{0}{0}\right)$, $y_1 - y$ ანუ $f(x_1) - f(x)$ ანუ $f(x)$-ის ნაზრდისათვის მინიმალურ გამოსახულების შეფარდებას $x_1 - x$ ანუ დამოუკიდებელ x ცვლადის ნაზრდისათვის მინიმალურ გამოსახულებასთან, აქვს ფორმა, რომელშიაც მრიცხველი განუყოფელია მნიშვნელისაგან. მაგრამ რატომ? რომ შევინარჩუნოთ $\frac{0}{0}$ როგორც შეფარდება

გამქრალი სხვაობების. მაგრამ როგორც კი $x_1 - x = 0$ ღებულობს dx-ში ფორმას, რომელიც მას მანიფესტირებს, როგორც x-ის გამქრალ სხვაობას, და, მაშასადამე, $y_1 - y$ აგრეთვე ჩნდება dy-ის სახით, განცალკევება მრიცხველის მნიშვნელისაგან ხდება სრულებით დასაშვები ოპერაცია. სადაც არ უნდა იყოს ახლა dx, მისი კავშირი dy-თან ხელუხლებელი რჩება ადგილის ამ გადანაცვლებით. $dy = df(x)$, მაშასადამე $= f'(x)\,dx$ არის მხოლოდ სხვა გამოსახულება $\frac{dy}{dx} = f'(x)$-თვის, რომელიც უნდა წარმოდგეს ბოლოს, რომ $f'(x)$ შეიძლება მიღებული იყოს როგორც თავისთავადი გამოსახულება. მაგრამ რამდენად ეს ფორმულა ხდება მაშინვე სასარგებლო როგორც ოპერატიული ფორმულა, გვიჩვენებს მაგალითი.

$$y^2 = ax$$

$$dy^2 = dax;\quad 2y\,dy = a\,dx$$

მაშასადამე

$$dx = \frac{2y\,dy}{a}.$$

თუ ჩავსვამთ dx-ის მნიშვნელობას მხებქვეშასათვის საერთო ფორმულაში $y\,\frac{dx}{dy}$, მივიღებთ:

$$y\,\frac{\frac{2y\,dy}{a}}{dy} = \frac{2y^2\,dy}{a\,dy} = \frac{2y^2}{a},$$

მაგრამ, რადგან $y^2 = ax$,

$$\frac{2y^2}{a} = \frac{2ax}{a} = 2x.$$

ამგვარად $2x$ ე. ი. ჩვეულებრივი პარაბოლის გაორკეცებული აბსცისი არის მნიშვნელობა მისი მხებქვეშასი. მაგრამ თუ განვიხილავთ $dy = f'(x)\,dx$ როგორც პირველ გამოსავალ პუნქტს, რომლიდანაც მხოლოდ შემდეგში გამოიყვანება $\frac{dy}{dx}$, იმისათვის, რომ y-ის ამ დიფერენციალს (das Differential) ჰქონდეს რაიმე აზრი, დიფერენციალური ნაწილაკები (die Differentiellen) dy, dx უნდა იყვნენ

წინასწარ ნაგულისხმევი, როგორც სიმბოლოები, რომელთაც გარკვეული აზრი აქვთ.

მსგავსი დაშვებები რომ წარმომდგარიყვნენ არა მათემატიკურ მეტაფიზიკიდან, არამედ უშუალოდ გამოყვანილი ყოფილიყვნენ, ვთქვათ, პირველი ხარისხის ფუნქციებიდან, როგორც $y=ax$, მაშინ, როგორც დავინახეთ წინად, ეს მიგვიყვანს $\frac{y_1-y}{x_1-x}=a$, რაც გადაიქცევა $\frac{dy}{dx}=a$. მაგრამ აქედანაც *a* priori არ შეიძლება არაფერი გარკვეულის მიღება. რადგანაც, იმის გამო, რომ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ისევე $=a$, როგორც $\frac{dy}{dx}=a$, ხოლო Δx და Δy ყოველთვის რჩებიან სასრულო სხვაობებად ანუ ნაზრდებად, მაგრამ სასრულო სხვაობებად ანუ ნაზრდებად შემცირების განუსაზღვრელი უნარით, ამიტომ dx, dy ერთნაირის წარმატებით შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც უსასრულო მცირე სიდიდეებიც, რომლებსაც შეუძლიათ განუსაზღვრელად მიუახლოვდნენ ნულს და აგრეთვე როგორც მიღებული x_1-x-ის და, მაშასადამე, y_1-y-ის ნულთან ნამდვილად გატოლების შედეგად. ორივე შემთხვევაში მარჯვენა მხარეზე მიიღება ერთიდაიგივე შედეგი. ამ მხარეზე არ არის არც x_1, არც x, ამიტომ არავითარი მიღება $x_1=x$ და, მაშასადამე, $x_1-x=0$. ეს მიღება $=0$ მეორე მხარეზე იქნებოდა ამიტომ იმდენადვე ნებსითი ჰიპოთეზი, როგორც დაშვება, რომ dx, dy არიან უსასრულოდ მცირე სიდიდეები. მე ვაჩვენებ sub IV მოკლედ, du-ის მაგალითზე, განვითარების ისტორიულ მსვლელობას. sub III-ის წინ[1] მოვიყვანოთ კიდევ ერთი მაგალითი, რომელიც ჯერ განხილული იქნება სიმბოლიური აღრიცხვის საფუძველზე, გარკვეულ მზა ოპერატიულ ფორმულის საშუალებით, და შემდეგ იქნება წარმოდგენილი ალგებრულად. ამგვარად sub II[2] გამოირკვა, რომ უკანასკნელი მეთოდი თითონ, იმდენად ელემენტარულ ფუნქციების მიმართ გამოყენებისას, როგორიცაა ორი ცვლადის ნამრავლი, თავისი საკუთარი შედეგებით ერთნაირის აუცილებლობით იძლევა გამოსავალ პუნქტს მეთოდისათვის, რომელიც მოქმედებს მოპირისპირე პოლუსიდან გამოსვლით.

Ad. IV.

დაბოლოს ღირს კიდევ (ლაგრანჟის მიხედვით) იმის შენიშვნა,

---

[1] განყოფილებები III და IV არაა.

[2] როგორც ჩანს, მხედველობაშია განყოფილება I.

რომ ზღვრის (Grenze) ანუ ზღვარითი მნიშვნელობის (Grenzwert) [კათეგორიები], რომელნიც გვხვდება უკვე ზოგჯერ დიფერენციალური კოეფიციენტის ნაცვლად ნიუტონთან და გამოყვანილია მის მიერ კიდევ წმინდა გეომეტრიულ წარმოდგენებიდან, აქამდესაც მუდმივად თამაშობენ გამოჩენილ როლს, სულ ერთია ფიგურირებენ სიმბოლიური გამოსახულებანი როგორც ზღვარი $f'(x)$-თვის ან, პირიქით, $f'(x)$—როგორც სიმბოლოს ზღვარი, ანდა ორივე მონაწილეობენ ზღვრების სახით. ეს კათეგორია, რომლითაც განსაკუთრებით ფართოდ ანალიტიკურად სარგებლობდა ლაკრუა, ხდება მნიშვნელობანი, როგორც შეცვლა კათეგორიისა „მინიმალური გამოსახულება",—ან წარმოებულისათვის, წინააღმდეგ „წინასწარი წარმოებულისა", ან შეფარდებისათვის $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, მხოლოდ იმდენად რამდენადაც ლაპარაკია ალრიცხვის გამოყენებაზე მრუდეებისათვის. მისი წარმოდგენა უფრო ადვილია გეომეტრიულად და ამიტომ გვხვდება უკვე ძველ გეომეტრებთანაც. ზოგ თანამედროვესთან ზღვარი დამალულია კიდევ იმაში, რომ დიფერენციალური ნაწილაკები (die Differentiellen) და დიფერენციალური კოეფიციენტები გამოთქვამენ მხოლოდ მიახლოვებით მნიშვნელობებს.

პირველი მონახაზი შრომისა დიფერენციალის შესახებ

ვთქვათ საჭიროა დიფერენცირება $f(x)$ ანუ $y=uz$, სადაც u და z x გან დამოკიდებული ცვლადებია. მაშინ

$$y_1 = u_1 z_1$$

და

$$y_1 - y = u_1 z_1 - uz,$$

მაშასადამე

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{u_1 z_1 - uz}{x_1 - x}$$

ანუ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u_1 z_1 - uz}{x_1 - x}.$$

მაგრამ

$$u_1 z_1 - uz = z_1 (u_1 - u) + u (z_1 - z).$$

ამგვარად

$$\frac{u_1 z_1 - uz}{x_1 - x} = z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + u \frac{z_1 - z}{x_1 - x}.$$

თუ მეორე მხარეზე $x_1 - x$ ხდება $= 0$ ანუ $x_1 = x$, მაშინ $u_1 - u = 0$ ე. ი. $u_1 = u$ და $z_1 - z = 0$ ე. ი. $z_1 = z$.

ამიტომ ჩვენ ვღებულობთ:

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

და, მაშასადამე,

$$d\,uz \text{ ანუ } dy = z\,du + u\,dz.$$

საჭიროა შეინიშნოს uz-ის ამ დიფერენცირების შესახებ, ყველა წინად განხილულ შემთხვევებისაგან განსხვავებით, სადაც ჩვენ გვქონდა მხოლოდ ერთი დამოკიდებული ცვლადი, რომ აქ დიფერენციალური სიმბოლოები არიან ერთბაშად განტოლების ორივე მხარეზე, სახელდობრ: პირველ ინსტანციაში

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx},$$

მეორეში

$$duz \text{ ანუ } dy = z\,du + u\,dz.$$

უკანასკნელს აგრეთვე აქვს ფორმა განსხვავებული დიფერენციალის ფორმისაგან ერთი დამოუკიდებელი[1] ცვლადის შემთხვევაში, როგორც მაგალითად $dy = f'(x)\,dx$, რადგან აქ გაყოფა dx-ზე გვაძლევს ჩვენ ერთბაშად $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ე. ი. სიმბოლიურ კოეფიციენტისაგან თავისუფალ კერძო მნიშვნელობას x-ის ფუნქციისაგან წარმოებულისა (abgeleitete), რასაც სრულებით არა აქვს ადგილი

$$dy = z\,du + u\,dz\text{-ში.}$$

ფუნქციებისათვის მხოლოდ ერთი დამოკიდებული ცვლადით ერთხელ და სამუდამოდ ნაჩვენებია, როგორ[2] x-ის გარკვეულ ფუნქციისაგან, მაგალითად $f(x) = x^m$, იწარმოება x-ის გარკვეული მეორე ფუნქცია, $f'(x)$, ან ამ შემთხვევაში mx^{m-1}, ნამდვილი დიფერენცირების და მის შემდგომი მოხსნის საშუალებით, და როგორ ამავე პროცესიდან ჩნდება ერთდროულად $f'(x)$

[1] წერის შეცდომა; უნდა იყოს: „დამოკიდებული".

[2] სიტყვები „ერთხელ და სამუდამოდ ნაჩვენებია როგორ" გამოშვებულია მარქსის მიერ ამ გვერდის არსებულ ვარიანტისაგან გადაწერისას.

წარმოებულ ფუნქციისათვის განტოლების მარცხენა მხარეზე სიმბოლიური ექვივალენტი $\frac{0}{0}=\frac{dy}{dx}$.

შემდეგ, მიღება $\frac{0}{0}=\frac{dy}{dx}$ იყო აქ არა მარტო დასაშვები, არამედ მათემატიკურად აუცილებელი, რადგან $\frac{0}{0}$-ს მის საკუთრივ, პირველყოფილ ფორმაში შეიძლება ჰქონდეს ნებსითი მნიშვნელობა, რადგან $\frac{0}{0}=x$ ყოველთვის უნდა მოგვცეს $0=0$. მაგრამ განსაპილველ შემთხვევაში $\frac{0}{0}$ ჩნდება როგორც სიმბოლიურ ექვივალენტი ერთგვარ სრულებით გარკვეულ რეალურ მნიშვნელობისა, მაგალითად mx^{m-1}, და თითონ არის მხოლოდ შედეგი ოპერაციებისა, რომლების საშუალებით ეს მნიშვნელობა წარმოებულია x^m-გან. როგორც ასეთი შედეგი იგი სწორედ შემაგრებულია ფორმით $\frac{dy}{dx}$.

აქ მაშასადამე, სადაც $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ ნაჩვენებია თავის წარმოშობაში, $f'(x)$ არავითარ შემთხვევაში არ მიიღება სიმბოლოს $\frac{dy}{dx}$ საშუალებით, არამედ პირიქით, ეს დიფერენციალური გამოსახულება $\frac{dy}{dx}$ მონახულია როგორც სიმბოლიური ექვივალენტი უკვე წარმოებულ x-ის ფუნქციისა. მაგრამ, როგორც კი ეს შედეგი ერთხელ მიღებულია, ჩვენ შეგვიძლია მოვიქცეთ შებრუნებით.

ვთქვათ საჭიროა $f(x)$-ის დიფერენცირება, მაგალითად x^m. მაშინ ჩვენ ჯერ ვეძებთ მნიშვნელობას dy და ვპოულობთ $dy=mx^{m-1}\,dx$, მაშასადამე $\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}$. აქ სიმბოლიური გამოსახულება ფიგურირებს როგორც გამოსავალი პუნქტი, და ჩვენ ვმოქმედობთ უკვე დიფერენციალურ აღრიცხვის ნიადაგზე მდგომი. ეს ნიშნავს, რომ $\frac{dy}{dx}$ და ა. შ. გვემსახურებიან როგორც **ფორმულები**, მიმთითებელი ჩვენთვის ცნობილ დიფერენციალურ ოპერაციებზე, რომელნიც უნდა ვაწარმოოთ $f(x)$-ზე. პირველ შემთხვევაში $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ მიიღება

როგორც $f'(x)$-ის სიმბოლიური ექვივალენტი, მეორეში $f'(x)$ მოიძებნება და მიიღება როგორც სიმბოლოების $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ და ა. შ. რეალური მნიშვნელობა. მაგრამ თუ ეს სიმბოლოები უკვე გვემსახურებიან როგორც დიფერენციალურ აღრიცხვის ოპერატიული ფორმულები, როგორც ასეთები ისინი შეიძლება გაჩნდენ აგრეთვე განტოლების მარჯვენა მხარეზეც, როგორც ამას ჰქონდა უკვე ადგილი უმარტივეს შემთხვევაში $dy=f'(x)\,dx$. თუ მსგავსი განტოლება მისი საბოლოო ფორმით არ შეიძლება, როგორც უმარტივეს შემთხვევაში, მაშინვე დაყვანილი იყოს $\frac{dy}{dx}=f'(x)$-ზე და ა. შ. ე. ი. რომელიღაც რეალურ მნიშვნელობაზე, ეს ნიშნავს, რომ მოცემული განტოლება მხოლოდ სიმბოლიურად გამოხატავს, როგორი ოპერაციები უნდა შესრულდეს, როცა [ფუნქციების] განუზღვრელ [ნიშნების] ადგილს დაიკავებენ გარკვეული ფუნქციები. უმარტივესი შემთხვევა, სადაც ამას ადგილი აქვს, არის duz, სადაც u და z ცვლადებია, მაგრამ ამასთანავე ორივე ფუნქციებია ერთსადაიმავე მესამე ცვლადის, მაგალითად x-ის. თუ დიფერენცირების პროცესს ერთბაშად მივყევართ

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}\text{-კენ,}$$

არ უნდა იყოს დავიწყებული, რომ u და z აქ ორივე x-გან დამოკიდებული ცვლადებია, ისევე როგორც y, რომელიც მხოლოდ იმდენად დამოკიდებულია u და z-გან, რამდენადაც x-გან. ერთი დამოკიდებული ცვლადის შემთხვევებში უკანასკნელი იმყოფებოდა სიმბოლიურ მხარეზე. ახლა კი ჩვენ გვაქვს მარჯვენა მხარეზე ორი ცვლადი, დამოუკიდებელი y-გან, მაგრამ დამოკიდებული x-გან, და მათი ხასიათი ცვლადებისა, რომელნიც x-გან დამოკიდებულია, წარმოგვიდგება მათ შესაბამის სიმბოლიურ კოეფიციენტებში $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. თუ დამოკიდებული ცვლადები წარმოგვიდგებიან მარჯვენა მხარეზეც, ამ მხარეზე ერთნაირის აუცილებლობით უნდა წარმოგვიდგეს აგრეთვე სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტებიც.

განტოლებიდან

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}$$

გამომდინარეობს:

$$duz \text{ ანუ } dy = z\,du + u\,dz.$$

მაგრამ ეს განტოლება მხოლოდ მიუთითებს იმ ოპერაციებზე, რომელნიც უნდა შევასრულოთ, როგორც კი u და z მოცემულია როგორც x-ის გარკვეული ფუნქციები.

უმარტივესი შემთხვევა იქნებოდა მაგალითად:

$$u = ax$$
$$z = bx$$

მაშინ

$$duz \text{ ანუ } dy = bx\,a\,dx + ax\,b\,dx.$$

ორივე მხარის dx-ზე გაყოფით მივიღებთ

$$\frac{dy}{dx} = abx + bax = 2abx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ab + ba = 2ab.$$

ავიღოთ ახლა თავიდანვე ნამრავლი

$$y \text{ ანუ } uz = ax\,bx = abx^2;$$

მაშინ

$$uz \text{ ანუ } y = abx^2,\ \frac{dy}{dx} = 2abx,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 2ab.$$

როგორც კი მიღებულია ფორმულა მსგავსი, მაგალითად, $z\,\dfrac{du}{dx}$-ის, ცხადია, რომ ეს განტოლება, რომელსაც შეიძლება უწოდოთ ზოგადი ოპერატიული განტოლება, არის შესასრულებელ დიფერენციალური ოპერაციების სიმბოლიური გამოსახულება. ავიღოთ მაგალითად გამოსახულება $y\,\dfrac{dx}{dy}$, სადაც y ორდინატია, x—აბსცისი. ეს ნებსით მრუდის მხებქვეშას ზოგადი სიმბოლიური გამოსახულებაა (სრულებით ისევე, როგორც $d\,uz = z\,du + u\,dz$ არის ზოგადი სიმბოლიური გამოსახულება ერთსადაიმავე მესამე ცვლადისაგან დამოკიდებულ ორი ნებსით ცვლადის ნამრავლის დიფერენცირებისათვის). მაგრამ სანამ ჩვენ ვტოვებთ ამ გამოსახულებას ისეთად, როგორიითაც ის არის, ის ჩვენ არაფერს გვაძლევს, თუმცაღა ჩვენ თვალსაჩინოთ

წარმოვიდგენთ, რომ dx არის აბსცისის დიფერენციალი, ხოლო dy— ორდინატისა.

რომელიც არ უნდა იყოს დადებითი შედეგი შეიძლება მხოლოდ მაშინ მიღებული იყოს, თუ ავიღებთ განტოლებას რომელიღაც გარკვეულ მრუდისა, რომელიც მოგვცემდა y-ის გარკვეულ მნიშვნელობას მის გამოსახულებაში x-ის საშუალებით და, მაშასადამე, აგრეთვე dy-საც dx-ის საშუალებით, როგორც, მაგალითად, ჩვეულებრივი პარაბოლის განტოლება: $y^2=ax$. უკანასკნელის დიფერენცირებით მივიღებთ $2ydy=a\,dx$, მაშასადამე $dx=\frac{2ydy}{a}$; dx-თვის ამ გარკვეულ მნიშვნელობის ჩასმით მხებქვეშას საერთო ფორმულაში, მივიღებთ

$$y\frac{\frac{2ydy}{a}}{dy}=\frac{y\,2ydy}{ady}=\frac{2y^2}{a}$$

რაც, რადგან $y^2=ax$,

$$=\frac{2ax}{a}=2x.$$

ეს არის ჩვეულებრივი პარაბოლის მ ხ ე ბ ქ ვ ე შ ა ს მნიშვნელობა. ის ამგვარად გ ა ო რ კ ე ც ე ბ უ ლ ა ბ ს ც ი ს ი ს ტოლია.

მაგრამ თუ ჩვენ მხებქვეშას აღვნიშნავთ τ-თი, ზოგადი განტოლება $y\,\frac{dx}{dy}=\tau$ გვაძლევს მხოლოდ $y\,dx=\tau\,dy$.

ამგვარად დიფერენციალურ აღრიცხვის თვალსაზრისით საკითხი ასე უნდა იყოს დასმული (ლაგრანჟის გამონაკლისით): მოიძებნოს $\frac{dy}{dx}$-თვის რეალური მნიშვნელობა.

შეიძლება გვეჩვენოს, რომ თუ ჩავსვამთ $\frac{dy}{dx}$ და ა. შ. ნაცვლად მათ საწყის ფორმას $\frac{0}{0}$, აღმოჩნდება სიძნელე: მაშინ

$$\frac{dy}{dx}=z\left(\frac{du}{dx}\right)+u\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

მიიღებს სახეს:

$$\frac{0}{0}=z\,\frac{0}{0}+u\,\frac{0}{0}$$

— სწორი მაგრამ არაფრისაკენ არ მიმყვანი განტოლება, შით უმეტეს, რომ ეს სამი $\frac{0}{0}$ გაჩნდენ სხვადასხვა დიფერენციალურ კოეფიციენტებისაგან, რომლების წარმოშობაში განსხვავებიდან უკვე არაფერი არ დარჩა. მაგრამ საჭიროა გავითვალისწინოთ:

1) უკვე პირველი გადაცემის დროს, ერთი დამოუკიდებელი[1] ცვლადის შემთხვევაში ჩვენ ჯერ მივიღეთ $\frac{0}{0}$ ანუ $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, მაშასადამე, $dy=f'(x)\,dx$. მაგრამ რადგან $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$, $dy=0$ და $dx=0$, მაშასადამე, $0=0$. თუ შებრუნებით შევცვლით $\frac{dy}{dx}$ მისი განუზღვრელი გამოსახულებით $\frac{0}{0}$, ჩავიდენთ დადებით შეცდომას, რადგან $\frac{0}{0}$ მონახულია აქ როგორც მხოლოდ სიმბოლიური ექვივალენტი რეალური მნიშვნელობისა $f'(x)$ და, როგორც ასეთი, შემაგრებულია გამოსახულებაში $\frac{dy}{dx}$, მაშასადამე აგრეთვე $dy=f'(x)\,dx$-ში.

2) $\frac{u_1 - u}{x_1 - x}$ ხდება $\frac{dy}{dx}$ ანუ $\frac{0}{0}$ იმის გამო, რომ x_1 ცვლადი ხდება x-ის ტოლი ანუ $x_1 - x = 0$; ამგვარად ჩვენ ერთბაშად ვღებულობთ $\frac{u_1 - u}{x_1 - x}$-თვის არა 0, არამედ $\frac{0}{0}$. მაგრამ ჩვენ საერთოდ ვიცით, რომ $\frac{0}{0}$-ს შეიძლება ყოველგვარი მნიშვნელობა ჰქონდეს და რომ გარკვეულ შემთხვევაში მას აქვს კერძო მნიშვნელობა, რომელიც მიიღება თუ ჩავსვამთ u-ს ნაცვლად x-ის რაიმე გარკვეულ ფუნქციას. ამიტომ ჩვენ არამცთუ გვაქვს უფლება შევცვალოთ $\frac{0}{0}$ $\frac{dy}{dx}$-ით, არამედ ჩვენ უნდა გავაკეთოთ ეს, რადგან როგორც $\frac{du}{dx}$ ისე $\frac{dz}{dx}$ ფიგურირებენ ამ შემთხვევაში როგორც მხოლოდ სიმბოლოები შესასრულებელ დიფერენციალურ ოპერაციების. სანამ ჩვენ არ ვცილდებით შედეგს:

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}, \text{ მაშასადამე } dy = z\,du + u\,dz,$$

---

[1] წერის შეცდომა; უნდა იყოს: „დამოკიდებული".

გამოსახულებანი $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, du, dz რჩებიან ისევე განუზღვრელი როგორც $\frac{0}{0}$, რომელსაც ნებსითი მნიშვნელობა შეუძლია მიიღოს.

3) ჩვეულებრივ ალგებრაშიაც $\frac{0}{0}$ შეიძლება გაჩნდეს როგორც ფორმა გამოსახულებებისათვის, რომელთაც გარკვეული რეალური მნიშვნელობა აქვთ, სწორედ იმიტომ, რომ $\frac{0}{0}$ შეიძლება იყოს ნებსითი სიდიდის სიმბოლო. ვთქვათ, მაგალითად, მოცემულია $\frac{x^2-a^2}{x-a}$. მივიღოთ $x=a$, მაშინ $x-a=0$ და $x^2=a^2$, ამიტომ $x^2-a^2=0$. ჩვენ მაშასადამე მივიღებთ: $\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{0}{0}$, აქამდე სწორი შედეგი, რომელიც მაინც სრულებით არაა იმის დამამტკიცებელი, იმ საფუძველზე რომ $\frac{0}{0}$ შეუძლია მიიღოს ნებსითი მნიშვნელობა, ვითომდაც $\frac{x^2-a^2}{x-a}$-ს არა აქვს არავითარი რეალური მნიშვნელობა. დავშალოთ x^2-a^2 მამრავლებად, მაშინ $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$, მაშასადამე

$$\frac{x^2-a^2}{x-a}=(x+a)\frac{x-a}{x-a}=x+a.$$

მაშასადამე, თუ $x-a=0$, მაშინ $x=a$ და ამიტომ $x+a=a+a=2a$.

ჩვეულებრივ ალგებრულ განტოლებაში რომ ყოფილიყო $P(x-a)$ სახის წევრი, მაშინ $x=a$ ანუ $x-a=0$-თვის აუცილებელია $P(x-a)=P\cdot 0=0$; იმავე დაშვებების პირობებში ნულის ტოლია $P(x^2-a^2)$. ამასთანავე მამრავლებად დაშლა x^2-a^2-ის არაფერს შეცვლიდა, რადგან

$$P(x+a)(x-a)=P(x+a)\cdot 0=0.$$

მაგრამ აქედან სრულებით არ გამომდინარეობს, რომ თუ $x=a$ მიღებით გვაქვს $P\cdot\left(\frac{0}{0}\right)$ სახის წევრი, მისი მნიშვნელობა აუცილებლად ნულის ტოლია. $\frac{0}{0}$ შეიძლება ჰქონდეს ნებსითი მნიშვნელობა, რადგან $\frac{0}{0}$ ყოველთვის გვაძლევს $0=x\cdot 0=0$; მაგრამ სწორედ იმიტომ, რომ $\frac{0}{0}$ შეუძლია ჰქონდეს ნებსითი მნიშვნელობა, ის არ

უნდა იყოს აუცილებლად ნულის ტოლი, და თუ ჩვენთვის ცნობილია მისი წარმოშობა, ამიტომ, რამდენადაც მის ქვეშ იმალება გარკვეული რეალური მნიშვნელობა, უკანასკნელი აგრეთვე შეიძლება იყოს მონახული. ასე მაგალითად, თუ $x=a$, $x-a=0$ და, მაშასადამე, აგრეთვე $x^2=a^2$, $x^2-a^2=0$, $P\frac{x^2-a^2}{x-a} = P\frac{0}{0}$. თუმცა ეს შედეგი მიღებულია მათემატიკურად სრულებით სწორად, იქნებოდა მათემატიკურადვე არა ნაკლებად ყალბი შემდგომის გარეშე მიგვეღო, რომ $P\cdot\frac{0}{0}=0$, რადგან ეს დაშვება შეიცავდა აუცილებლობას $\frac{0}{0}$ გამოსახულების ნულთან ტოლობისა და, მაშასადამე, [ტოლობისაც] $P\cdot\frac{0}{0}=P\cdot 0$. პირიქით, საჭირო იქნებოდა გამოგვეკვლია ხომ არ მიიღებოდა სხვა შედეგი x^2-a^2-ის დაშლისას მის მამრავლებად $(x-a)(x+a)$; მართლაც, ეს დაშლა გადააქცევს გამოსახულებას $P\frac{x^2-a^2}{x-a}$ $P\cdot(x+a)\frac{x-a}{x-a}=P\cdot(x+a)\cdot 1$-ად და, რადგან $x=a$, $P\cdot 2a$ ანუ $2Pa$-დ. მით უფრო, როგორც კი ჩვენ საქმე ცვლადებთან გვაქვს, შემაგრება $\frac{0}{0}$-ის წარმოშობისა დიფერენციალურ სიმბოლოების $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ საშუალებით არა მარტო გამართლებულია, არამედ პირდაპირ აუცილებელია, იმის შემდეგ, რაც ჩვენ თავში დავამტკიცეთ, რომ ისინი ჩნდებიან როგორც სიმბოლიური ექვივალენტები წარმოებულ ფუნქციებისა ცვლადი სიდიდეებისაგან, რომლებმაც შეასრულეს დიფერენცირების გარკვეული პროცესები. თუ ამგვარად $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ თავში წარმოადგენენ დიფერენცირების მსგავს პროცესების შედეგს, სწორედ ამიტომ მათ შეუძლიათ, პ ი რ ი ქ ი თ, გახდნენ პროცესების სიმბოლოები, რომლებსაც უნდა შემდეგში დაექვემდებარონ ცვლადები, ე. ი. ო პ ე რ ა ტ ი უ ლ ი ს ი მ ბ ო ლ ო ე ბ ი, რომელნიც უკვე ფიგურირებენ არა როგორც შედეგი, არამედ როგორც გამოსავალი პუნქტი. და ამასში არის მათი არსებითი როლი დიფერენციალურ აღრიცხვაში. როგორც ასეთი ოპერატიული სიმბოლოები, თითონ ისინი შეიძლება გახდენ შინაარსად განტოლებე-

ბისა სხვადასხვა ცვლადებს შორის (უცხად ფუნქციებში მარჯვენა მხარეზე თავიდანვე დგას 0, ხოლო ყველა დამოკიდებული და დამოუკიდებელი ცვლადები, მათი კოეფიციენტებით, არიან მარცხნივ).

ამგვარადაა განტოლებებში, რომელნიც ჩვენ მივიღეთ:

$$\frac{duz}{dx} \text{ ანუ } \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}.$$

თუ უგულებელვყოფთ წინად ნათქვამს, x-გან დამოკიდებული ფუნქციები u და z თვით კვლავ ჩნდებიან აქ შეუცვლელად როგორც u და z, მაგრამ თითოეულ მათგანს თან ახლავს მამრავლის სახით მეორის სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტი. ამ განტოლებას აქვს ამგვარად მნიშვნელობა მხოლოდ გარკვეულ ზოგად განტოლებისა, რომელიც მიგვითითებს სიმბოლოების საშუალებით, როგორი ოპერაციების შესრულება საჭიროა, როცა u და z მოცემულია როგორც დამოკიდებული ცვლადები x-ის გარკვეულ ორ ფუნქციით. მხოლოდ გარკვეულ u და z ფუნქციებისათვის გამოსახულებანი $\frac{du}{dx} = \frac{0}{0}$ და[1] $\frac{dz}{dx} = \frac{0}{0}$ და მაშასადამე აგრეთვე $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ შეიძლება ნულის ტოლი იყვნენ ე. ი. მნიშვნელობა $\frac{0}{0} = 0$ არ შეიძლება იყოს თავიდანვე ნაგულისხმევი, არამედ თვით უნდა იყოს გარკვეულ განტოლებების შედეგი, რომელნიც ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას გამოსახავენ.

თუ, მაგალითად, $u = x^3 + ax^2$, მაშინ

$$\left(\frac{0}{0}\right) = \frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax; \quad \left(\frac{0}{0}\right)^1 = \frac{d^2u}{dx^2} = 6x + 2a;$$

$$\left(\frac{0}{0}\right)^2 = \frac{d^3u}{dx^3} = 6; \quad \left(\frac{0}{0}\right)^3 = \frac{d^4u}{dx^4} = 0; \text{ ე. ი. ამ შემთხვევაში } \frac{0}{0} = 0.$$

მოკლე აზრი მთელ ამ გრძელ ისტორიის იმასში მდგომარეობს, რომ ჩვენ ვღებულობთ აქ თითონ დიფერენცირების საშუალებით **დიფერენციალურ კოეფიციენტებს მათ სიმბოლიურ ფორმაში** როგორც შედეგს, როგორც დიფერენციალური განტოლების მნიშვნელობებს, სახელდობრ განტოლებაში:

---

[1] ხელნაწერში წერის შეცდომა: „ანუ".

$$\frac{duz}{dx} \text{ ანუ } \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}.$$

მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ $u = x$-ის გარკვეულ ფუნქციის, მაგალითად $f(x)$. ამიტომ $\frac{u_1 - u}{x_1 - x}$, მის დიფერენციალურ სიმბოლოში $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, ე. ი. $f(x)$-ის პირველ წარმოებულის.

სრულებით ასევე $z = \varphi(x)$ მაგალითად, საიდანაც იმგვარადვე $\frac{dz}{dx} = \varphi'(x)$, $\varphi(x)$-ის პირველ წარმოებულის. მაგრამ თვით საწყისი განტოლება არ გვაძლევს ჩვენ არც u-ს არც z-ს x-ის რაიმე გარკვეულ ფუნქციების სახით, როგორც მაგალითად $u = x^m$, $z = \sqrt{x}$. ის გვაძლევს u-ს და z-ს მხოლოდ როგორც ზოგად გამოსახულებებს x-ის ნებსით ორ ფუნქციისა, რომელთა ნამრავლის დიფერენცირებაა საჭირო.

ეს განტოლება გვიჩვენებს, რომ თუ საჭიროა დიფერენციაცია x-ის რაიმე ორი ფუნქციის ნამრავლისა, წარმოდგენილისა სახით uz, საჭიროა ჯერ მოინახოს სიმბოლიურ დიფერენციალურ კოეფიციენტის $\frac{du}{dx}$-ის რეალური მნიშვნელობა ე. ი. პირველი წარმოებული ფუნქცია, ვთქვათ, $f(x)$-დან და გამრავლებული იყოს ეს მნიშვნელობა $\varphi(x) = z$-ზე, შემდეგ ამგვარადვე მოინახოს $\frac{dz}{dx}$-ის რეალური მნიშვნელობა და გამრავლებული იყოს $f(x) = u$-ზე; დაბოლოს შეიკრიბოს მიღებული ნამრავლები. დიფერენციალურ აღრიცხვის ოპერაციები აქ უკვე ცნობილად იგულისხმება. ამგვარად მოცემული განტოლება არის მხოლოდ სიმბოლიური მითითება მოსახდენ ოპერაციების, ხოლო სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტები $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ ხდებიან აქ ამასთან ერთად დიფერენციალურ ოპერაციების მიმთითებლად, რომელიც უნდა შესრულდეს თითოეულ კონკრეტულ შემთხვევაში, მაშინ როცა თავში ისინი თვით იყვნენ წარმოებული როგორც უკვე შესრულებულ დიფერენციალურ ოპერაციების სიმბოლიური ფორმულები.

როგორც კი მათ ასეთი ხასიათი მიიღეს, ისინი თვით შეიძლება გახდენ დიფერენციალურ განტოლებათა შინაარსად, როგორც, მაგალითად, ტ ე ი ლ ო რ ი ს თ ე ო რ ე მ ა შ ი:

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx}h + \text{etc.}$$

მაგრამ ეს მაშინ არიან აგრეთვე მხოლოდ ზოგადი სიმბოლიური ოპერატიული განტოლებანი. uz-ის დიფერენცირებაში საინტერესოა ამიტომ ის, რომ ეს უმარტივესი შემთხვევაა, რომელშიაც, იმ შემთხვევებიდან განსხვავებით, სადაც შედის მხოლოდ ერთი დამოუკიდებელ x ცვლადისაგან დამოკიდებული y ცვლადი, თითონ საწყის მეთოდის გამოყენებისას დიფერენციალური სიმბოლოები ჩნდებიან განტოლების მარჯვენა მხარეზედაც (მისი გაშლილ გამოსახულების მხარეზე), რის გამოც წარმოგვიდგებიან როგორც დიფერენციალური სიმბოლოები და როგორც ასეთები თვით ხდებიან განტოლების შინაარსად.

ეს როლი, რომელშიაც ისინი გამოდიან როგორც შესასრულებელ ოპერაციების მაჩვენებლები და ამის გამო გამოსავალ პუნქტად გვემსახურებიან, არის მათი კუთვნილი როლი უკვე საკუთარ ნიადაგზე მომქმედ დიფერენციალურ აღრიცხვაში. მაგრამ ეჭვს გარეშეა, რომ ეს გადატრიალება, ეს როლების შებრუნება არც ერთ მათემატიკოსის მიერ შენიშნული არ იყო, და მით უფრო არ იყო მისი აუცილებლობა დამტკიცებული რაიმე სავსებით ელემენტარულ დიფერენციალურ განტოლებაზე. აღინიშნება როგორც მხოლოდ ფაქტი, რომ იმ დროს როცა დიფერენციალური აღრიცხვის გამომგონებლები და მათი მიმდევრების უმრავლესობა დიფერენციალურ სიმბოლოებს აღრიცხვის გამოსავალ პუნქტად ხდიან, ლაგრანჟი, პირიქით, გამოსავალ პუნქტად იღებს დამოუკიდებელ ცვლადების ნამდვილ ფუნქციების ალგებრულ წარმოებას (die algebraische Ableitung), და დიფერენციალურ სიმბოლოებს ხდის უკვე წარმოებულ ფუნქციების სიმბოლიურ გამოსახულებებად.

დაუბრუნდეთ ისევე duz-ს. ჯერ $x_1 - x = 0$ მიღების შედეგად თითონ დიფერენციალურ ოპერაციის პროდუქტის სახით ჩვენ ვღებულობთ:

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}.$$

რადგან მნიშვნელები აქ ერთნაირია, ჩვენ ვღებულობთ როგორც დაყვანილ გამოსახულებას

$$dy = z\,du + u\,dz.$$

ეს შეესაბამება იმას, რომ მხოლოდ ერთი დამოკიდებული ცვლადის შემთხვევაში ჩვენ მივიღეთ სიმბოლიურ გამოსახულებად x-ის ფუნ-

ქციის წარმოებულისათვის ე. ი. $f'(x)$-თვის (მაგალითად max^{m-1}-თვის, რომელიც არის $f'(x)$, თუ $f(x)=ax^m$) მარცხენა მხარეზე $\frac{dy}{dx}$ როგორც მისი სიმბოლიური გამოსახულება:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x),$$

და მხოლოდ როგორც შედეგი აქედან

$$dy=f'(x)\,dx$$

(მაგალითად $\frac{dy}{dx}=max^{m-1}$; $dy=max^{m-1}dx$, რაც არის y ფუნქციის დიფერენციალი) (უკანასკნელი ჩვენ შეგვიძლია ერთბაშად გადავაქციოთ შებრუნებით $\frac{dy}{dx}=max^{m-1}$-ად). მაგრამ შემთხვევა $dy=z\,du+u\,dz$ განსხვავდება კიდევ იმით, რომ du, dz დიფერენციალები აქ დგანან მარჯვენა მხარეზე როგორც ოპერატიული სიმბოლოები და რომ მხოლოდ მათ მიერ მითითებულ ოპერაციების შესრულების შემდეგ განისაზღვრება dy.

თუ

$$u=f(x),$$
$$z=\varphi(x),$$

მაშინ ჩვენ ვიცით, რომ

$$du=f'(x)\,dx,$$

ხოლო

$$dz=\varphi'(x)\,dx.$$

მაშასადამე

$$dy=\varphi(x)\,f'(x)\,dx+f(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x)\,f'(x)+f(x)\,\varphi'(x).$$

პირველ შემთხვევაში ამგვარი გზით ჯერ მიღებულია დიფერენციალური კოეფიციენტი $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ და მერე დიფერენციალი $dy=f'(x)\,dx$. მეორეში — ჯერ დიფერენციალი dy და მერე დიფერენციალური კოეფიციენტი $\frac{dy}{dx}$. პირველ შემთხვევაში, სადაც თვით დი-

ფერენციალური სიმბოლოები მხოლოდ ჩნდებიან $f(x)$-ზე წარმოებულ ოპერაციებიდან, უნდა ჯერ მოინახოს წარმოებული ფუნქცია, — ნამდვილი დიფერენციალური კოეფიციენტი, — რომ მის შესახვედრად გამოვიდეს $\frac{dy}{dx}$, როგორც მისი სიმბოლიური გამოსახულება, და მხოლოდ იმის შემდეგ რაც ის მონახულია, შეიძლება გამოყვანილი იყოს დიფერენციალი $dy=f'(x)\,dx$.

პირიქით, $dy=z\,du+u\,dz$-ში, რადგან du, dz მონაწილეობენ აქ როგორც ოპერატიული სიმბოლოები და ამასთანავე მიმთითებელი ისეთ ოპერაციებზე, რომლების შესრულება ჩვენ უკვე შევისწავლეთ დიფერენციალურ აღრიცხვაში, ამიტომ $\frac{dy}{dx}$-ის რეალური მნიშვნელობის მოსაპოვებლად ჩვენ უნდა ჯერ ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში შევცვალოთ u და z მათი მნიშვნელობებით x-ში, რომ მოვნახოთ $dy=\varphi(x)f'(x)\,dx+f(x)\varphi'(x)\,dx$; და მხოლოდ შემდგომი გაყოფა dx-ზე გვაძლევს ჩვენ რეალურ მნიშვნელობას

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x)f'(x)+f(x)\varphi'(x)\text{-თვის.}$$

იგივეს, რასაც $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ -თვის, და ა. შ. ადგილი აქვს აგრეთვე ყველა უფრო რთულ ფორმულისათვის, სადაც თვით დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი ს ი მ ბ ო ლ ო ე ბ ი ჩნდებიან როგორც შინაარსი ზოგად სიმბოლიურ ოპერატიულ განტოლებებისა.

III

ისტორიული მიმოხილვა

B (A-ს გ ა გ რ ძ ე ლ ე ბ ა)[1]

1) ნ ი უ ტ ო ნ ი, დაბ. 1642 † 1727. «ნატურალურ ფილოსოფიის მათემატიკური პრინციპები», გამოქვეყნებულია 1687 წ.

წ. I, ლ ე მ ა XI. ს ქ ო ლ ი ო ნ ი.

წ. II, ლ ე მ ა II დ ე ბ უ ლ ე ბ ი ს VII შ ე მ დ ე გ.

---

[1] ცალკე ფურცელი რვეულის დასაწყისში.

«წკრივების საშუალებით ანალიზი სიდიდეების, ფლუქსიების etc»[1].

დაწერილია 1665 წ. გამოქვეყნებულია 1711 წ.

2) ლეიბნიცი.

3) ტეილორი (ბრუკ), დაბ. 1685 † 1731, გამოაქვეყნა 1715 — 1717 წ. «ნაზრდების მეთოდი etc».

4) მაკლორენი (კოლინ), დაბ. 1698 † 1746.

5) ჯონ ლანდენი

6) დალამბერი, დაბ. 1717 † 1783. «ტრაქტატი სითხეებზე», 1744.

7) ეილერი (ლეონარდ), დაბ. 1707 † 1783. «უსასრულოდ მცირეთა ანალიზის შესავალი», ლოზანა, 1748.

«დიფერენციალურ აღრიცხვის საფუძვლები», 1755 (ნ. I. თ. III).

8) ლაგრანჟი, დაბ. 1736. «ანალიზურ ფუნქციათა თეორია» (1797 და 1813). (იხ. შესავალი).

9) პუასონი (დენის, სიმეონ), დაბ. 1781 † 1840.

10) ლაპლასი (პ. სიმეონ, მარკიზი დე-), დაბ. 1749 † 1827.

11) მუანიო. ლექციები დიფერენციალურ და ინტეგრალურ აღრიცხვაში.

ნიუტონი, დაბ. 1642 † 1727 (85 წლის) «ნატურალურ ფილოსოფიის მათემატიკური პრინციპები» (პირველად გამოქვეყნებულია 1687 წ.). იხ. ლემა I და ლემა XI (სქოლიონი).

შემდეგ განსაკუთრებით «წკრივთა საშუალებით ანალიზი სიდიდეების, ფლუქსიების etc». პირველად გამოქვეყნებულია 1711 წ., მაგრამ დაწერილია 1665 წ., იმ დროს როცა ლეიბნიცი მივიდა იმავე აღმოჩენამდე მხოლოდ 1676 წ.

ლეიბნიცი დაბ. 1646 † 1716 (70 წლის).

ლაგრანჟი დაბ. 1736 † მხოლოდ იმპერიის დროს (ნაპოლეონი I).

ვარიაციათა აღრიცხვის გამომგონებელი. «ანალიზურ ფუნქციათა თეორია» (1797 და 1813 წ.).

[1] სრული სახელწოდება: «Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias: cum enumeratione linearum tertii or inis». შემდეგ სახელწოდებულია ნიუტონის მიერ «De analysi per aequationes numero terminorum infinitas».

დ ა ლ ა მ ბ ე რ ი დაბ. 1717 † 1783 (66 წლის). «ტრაქტატი სითხეებზე» 1744 წ.

1) ნ ი უ ტ ო ნ ი. ფლუქსიების[1] სიჩქარეებს მაგალითად x, y etc. ცვ ლ ა დ ე ბ ი ს ა ა ღ ნ ი შ ნ ა ვ ს $\dot{x}$, $\dot{y}$, etc. თუ, მაგალითად, u და x უ რ თ ი ე რ თ დ ა კ ა ვ შ ი რ ე ბ უ ლ ი ს ი დ ი დ ე ე ბ ი ა (ფ ლ უ ე ნ ტ ე ბ ი) გ ა ნ უ წ ყ ვ ე ტ ე ლ ი მ ო ძ რ ა ო ბ ი თ წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი, მაშინ $\dot{u}$ და $\dot{x}$ აღნიშნავენ მათი გაზრდის სიჩქარეებს და, მაშასადამე, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ სიჩქარეთა შეფარდებაა, რომლითაც წარმოებულია მათი ნაზრდები.

რადგან ყველა შესაძლებელ რაოდენობის რიცხვობრივი სიდიდეები შეიძლება წარმოდგენილი იყოს სწორი ხაზებით, ამიტომ წარმოებულ სიდიდეების მ ო მ ე ნ ტ ე ბ ი ანუ უსასრულოდ მცირე პორციები = მათი სიჩქარეების ნამრავლისა დროის უსასრულოდ მცირე შუალედებზე, რომლების განმავლობაში ეს სიჩქარეები ხანგრძლივობენ[2], ისე რომ თუ დროის უსასრულოდ მცირე შუალედს τ-თი აღვნიშნავთ, x და y-ის მომენტები წარმოგვიდგებიან შესაბამისად როგორც $\tau\dot{x}$ და $\tau\dot{y}$.

მაგალითად $u = uz$; თუ აღვნიშნავთ u, z, y სიდიდეების გაზრდის სიჩქარეებს, შესაბამისად, $\dot{u}$, $\dot{z}$, $\dot{y}$, მათი მომენტები იქნებიან $\tau\dot{u}$, $\tau\dot{z}$, $\tau\dot{y}$ და ჩვენ ვღებულობთ:

$$y = uz,$$

$$y + \tau\dot{y} = (u + \tau\dot{u})(z + \tau\dot{z}) = uz + u\tau\dot{z} + z\tau\dot{u} + \tau^2\dot{u}\dot{z},$$

---

[1] წერის შეცდომა: უნდა იყოს: «ფლუენტების».

[2] ეს დასკვნა (ნიუტონის მიხედვით) მოითხოვს ახსნა განმარტებას. «რადგან ყველა შესაძლებელ სიდიდეების რიცხვობრივი სიდიდეები შეიძლება წარმოდგენილი იყოს სწორი ხაზებით», ამიტომ ყოველი სიდიდის ცვალება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს სწორხაზოვან მოძრაობის სახით ცვლადი სიჩქარით. მაგრამ რადგან დროის უსასრულოდ მცირე შუალედის განმავლობაში მოძრაობის სიჩქარე შეიძლება უცვლელად ჩაითვალოს, ამ შუალედის შესაბამისი მოძრაობის გზა, გავლილი წერტილის მიერ (და მაშასადამე ჩვენი სიდიდის სათანადო ცვლილებაც) ტოლია ამ სიდიდის სიჩქარის (ფლუქსიის) ნამრავლისა დროის (უსასრულოდ მცირე) შუალედზე τ. ამიტომ «წარმოებულ სიდიდეების მომენტები ანუ უსასრულოდ მცირე პორციები ტოლია მათი სიჩქარეების ნამრავლისა დროის უსასრულოდ მცირე შუალედებზე».

საიდანაც

$$\tau \dot{y} = u\tau\dot{z} + z\tau\dot{u} + \tau^2\dot{u}\dot{z}.$$

რადგან τ უსასრულოდ მცირეა, ამიტომ ის თავისთავად ქრება და მით უფრო სრულებით ქრება $\tau^2\dot{u}\dot{z}$, როგორც ნამრავლი, რომელიც ჩნდება დროის არა უსასრულოდ მცირე შუალედის τ განმავლობაში, არამედ მისი მეორე ხარისხის.

$$\left(\text{თუ მაგალითად } \tau = \frac{1}{\text{მილიონედი}},\ \tau^2 = \frac{1}{1\ \text{მლნ.} \times 1\ \text{მლნ.}}\right).$$

ამგვარად ვღებულობთ: $\dot{y} = u\dot{z} + z\dot{u}$,

ე. ი. $y = uz$-ის ფლუქსია არის $u\dot{z} + z\dot{u}$.

2) ლ ე ი ბ ნ ი ც ი. ვთქვათ საჭიროა მოინახოს uz-ის დიფერენციალი. u გადაიქცევა $u + du$-ად, z კი $z + dz$-ად; ამიტომ

$$uz + duz = (u + du)(z + dz) = uz + u\,dz + z\,du + du\,dz.$$

თუ გამოვაკლებთ აქედან მოცემულ uz სიდიდეს, დარჩება, როგორც ნაზრდი, $u\,dz + z\,du + du\,dz$. მაგრამ $du\,dz$, ნამრავლი ერთი უსასრულოდ მცირისა du მეორე უსასრულოდ მცირეზე dz არის მეორე რიგის უსასრულოდ მცირე და ქრება შედარებით პირველ რიგის უსასრულოდ მცირესთან $u\,dz + z\,du$. ამიტომ

$$duz = u\,dz + z\,du.$$

[3] დ ' ა ლ ა მ ბ ე რ ი სვამს ზოგადი სახით ამოცანას ასე.

ვთქვათ

$$y = f(x)$$
$$y_1 = f(x + h);$$

გამოვარკვიოთ როგორ მნიშვნელობას ღებულობს $\frac{y_1 - y}{h}$, როცა h გადაიქცევა ნულად ე. ი. გამოვარკვიოთ მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა $\frac{0}{0}$.

ნიუტონი და ლეიბნიცი, როგორც მათი მიმდევრების უმრავლესობაც, მოქმედებდენ თავიდანვე დიფერენციალურ აღრიცხვის ნიადაგზე. ამიტომ დიფერენციალური გამოსახულებანი თავიდანვე გამოყენებული იყო როგორც ოპერატიული ფორმულები იმისათვის, რომ მოძებნილი ყოფილიყო შემდეგ რეალური ექვივალენტები. სწორედ ამაშია მთელი სიმახვილე (Witz). თუ დამოუკიდებელი x ცვლადი

გადაიქცევა x_1-ად, დამოკიდებული ცვლადი გადაიქცევა y_1-ად. მაგრამ $x_1 - x$ ერთნაირის აუცილებლობით ტოლია რაიმე სხვაობისა, = მაგალითად h-ის; ამას თითონ ცვლადის ცნება შეიცავს. მაგრამ ამისაგან არავითარ შემთხვევაში არ გამომდინარეობს, რომ ეს სხვაობა $= dx$ არის ქრებადი ე. ი. ნამდვილად $= 0$. მან შეიძლება წარმოადგინოს აგრეთვე ნამდვილი სხვაობაც. მაგრამ თუ ჩვენ თავიდანვე დავუშვებთ, რომ x გაზრდისას გადაიქცევა $x + \dot{x}$ (τ ნიუტონთან არ თამაშობს არავითარ როლს მის ანალიზში ძირითად ფუნქციებისა და ამიტომ შეიძლება გამოტოვებული იყოს) ან, ლეიბნიცთან ერთად, $x + dx$-ში, დიფერენციალური გამოსახულებანი ერთბაშად ხდებიან ოპერატიულ სიმბოლოებად, უიმისოდ, რომ იყოს გამოვლინებული მათი ალგებრული წარმოშობა.

Ad ნიუტონი.

ავიღოთ ნიუტონური განტოლება uz ნამრავლის დიფერენცირებისათვის:

$$y = uz$$
$$y + \tau\dot{y} = (u + \tau\dot{u})(z + \tau\dot{z}).$$

უკუვაგდოთ τ, როგორც ამას თვითონვე აკეთებს პირველ დიფერენციალურ განტოლების გაშლისას; მაშინ ჩვენ მივიღებთ

$$y + \dot{y} = (u + \dot{u})(z + \dot{z}) = uz + u\dot{z} + z\dot{u} + \dot{u}\dot{z}$$

და

$$y + \dot{y} - uz = u\dot{z} + z\dot{u} + \dot{u}\dot{z},$$

მაშასადამე, რადგან $uz = y$:

$$\dot{y} = u\dot{z} + z\dot{u} + \dot{u}\dot{z},$$

და რომ სწორი შედეგი მივიღოთ, უნდა წავშალოთ $\dot{u}\dot{z}$.

მაგრამ საიდან გაჩნდა ეს წევრი, რომელსაც სჭირდება ნაძალადევად მოსპობა? სრულებით უბრალოდ: იმის გამო, რომ y, u და z-ის დიფერენციალები იყვნენ შემოყვანილი თავიდანვე განმარტებით როგორც თავისთავადი (selbstständige), ცვლად სიდიდეებისაგან განცალკევებული, რომლებისგან ისინი წარმოიშვნენ, არსებობანი (Existenzen), და არა გამოყვანილი რაიმე მათემატიკური გზით.

ერთის მხრით, სჩანს, როგორი სარგებლობა მოაქვს ამ წასწრებულად ნაგულისხმევ არსებობას dy, dx ან $\dot{y}$, $\dot{x}$; ცვლადების ზრდისას საჭიროა მხოლოდ ჩავსვათ ალგებრულ ფუნქციაში მათ ნაცვლად ბინომები $y+\dot{y}$, $x+\dot{x}$ და ა. შ. და შემდეგ მათთან მანევრირება როგორც ჩვეულებრივ ალგებრულ სიდიდეებთან.

მაგალითად $y=ax$-თვის ვიღებ

$$y+\dot{y}=ax+a\dot{x},$$

მაშასადამე

$$y-ax+\dot{y}=a\dot{x}$$

და ამიტომ

$$\dot{y}=a\dot{x}.$$

ამით მე ერთბაშად მივიღე შემდეგი: ცვლადი სიდიდის დიფერენციალი ტოლია ax-ზე ნაზრდის, სახელდობრ $a\dot{x}=ax$-დან წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ რეალურ სიდიდის a (ის, რომ უკანასკნელი არის აქ მუდმივი, შემთხვევითი ხასიათის გარემოებაა, რომელიც არაფერს ცვლის შედეგის ზოგადობაში და მხოლოდ იმითაა გამოწვეული, რომ x ცვლადი არის პირველ ხარისხში) [ნამრავლისა დამოუკიდებელ ცვლადის დიფერენციალზე].

მე მინდა განვაზოგადო ეს შედეგი. მე ვიცი, რომ $y=f(x)$, რადგან ეს სწორედ იმას აღნიშნავს, რომ y ცვლადია x-გან დამოკიდებული. თუ მე ვუწოდებ $f(x)$-გან წარმოებულ სიდიდეს, ე. ი. ნაზრდის რეალურ ელემენტს, $f'(x)$-ს, საერთო შედეგი იქნება:

$$\dot{y}=f'(x)\cdot\dot{x}.$$

ამგვარად, მე უკვე თავიდანვე ვიცი, რომ დამოკიდებულ y ცვლადის დიფერენციალის ექვივალენტი ტოლია დამოუკიდებელ ცვლადის პირველ წარმოებულ ფუნქციის, გამრავლებულის მის დიფერენციალზე ე. ი. dx-ზე ანუ $\dot{x}$-ზე.

ამგვარად, ზოგადი სახით, თუ

$$y=f(x),$$

მაშინ

$$dy=f'(x)\,dx$$

ანუ $\dot{y}=$რეალურ კოეფიციენტის [როგორც ფუნქციისა] x-ში (in x)

(იმ შემთხვევის გამოკლებით, სადაც ჩნდება მუდმივი, იმის გამო, რომ x შედის პირველ ხარისხში) გამრავლებულის $\dot{x}$-ზე.

მაგრამ $y=ax$ მაძლევს მე ერთბაშად $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=a$ ანუ, საზოგადოთ,

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=f'(x).$$

ამგვარად, მე მოვნახე ორი ქვემოდ განვითარებული ოპერატიული ფორმულა დიფერენციალისათვის და დიფერენციალურ კოეფიციენტისათვის, რომელნიც შეადგენენ მთელ დიფერენციალურ აღრიცხვის ბაზისს.

და, გარდა ამისა, საერთოდ რომ ვილაპარაკოთ, a priori ნაგულისხმევ dx, dy etc. ანუ $\dot{x}$, $\dot{y}$, etc., როგორც x და y-ის თავისთავადი იზოლირებული ნაზრდების, პირობებში მე ვღებულობ უდიდეს უპირატესობას, რომელიც ანსხვავებს (auszeichnet) დიფერენციალურ აღრიცხვას და იმასში მდგომარეობს, რომ ცვლადების ყველა ფუნქციები თავიდანვე წარმოიდგინებიან დიფერენციალურ ფორმაში.

ამ გზით ცვლადების ძირითად ფუნქციების, როგორც ax, $ax\pm b$, xy, $\frac{x}{y}$, x^n, a^x, $\log x$, ისევე როგორც ელემენტარული წრიული ფუნქციების განვითარებით, მე შემიძლია შემდეგში dy, $\frac{dy}{dx}$-ის მოძებნისას გამოვიყენო ისინი სრულებით ისევე, როგორც გამრავლების ცხრილი არითმეტიკაში.

მაგრამ თუ ჩვენ შევხედავთ საქმის შიდა პირს (Kehrseite), ერთბაშად გამოვარკვევთ, რომ მთელი პირვანდელი (urspüngliche) ოპერაცია მათემატიკურად ყალბია.

ავიღოთ სრულებით მარტივი მაგალითი: $y=x^2$.

როცა x იზრდება, ის ღებულობს ერთნაირ განუზღვრელ ნაზრდს h, რის გამოც მისგან დამოკიდებული y ცვლადიც ღებულობს ერთნაირ განუზღვრელ ნაზრდს k. მაშინ

$$y+k=(x+h)^2=x^2+2xh+h^2,$$

— ფორმულა, რომელიც მოცემული გვაქვს ბინომით. აქედან

$$y+k-x^2 \text{ ანუ } y+k-y=2xh+h^2,$$

ე. ი.

$$(y+k)-y \text{ ანუ } k=2hx+h^2.$$

ორივე ნაწილის h-ზე გაყოფით ვღებულობთ

$$\frac{k}{h}=2x+h.$$

თუ ჩვენ მივიღებთ ახლა $h=0$, მაშინ $2x+h$ იქნება $=2x+0=2x$. მეორე მხრით, $\frac{k}{h}$ გადაიქცევა $\frac{k}{0}$-ად. მაგრამ რადგან y გადაიქცა $y+k$ მხოლოდ იმის გამო, რომ x გადაიქცა $x+h$, ამიტომ როცა h გახდება 0 და, მაშასადამე, $x[+h]$ დაუბრუნდება $x+0$ ე. ი. x, $y[+k]$ კვლავ გახდება y. ამგვარად, k აგრეთვე გადაიქცევა ნულად და $\frac{k}{0}=\frac{0}{0}$, რაც შეგვიძლია წარმოვადგინოთ $\frac{dy}{dx}$ ანუ $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ სახით. ჩვენ მივიღებთ ამგვარად

$$\frac{0}{0} \text{ ანუ } \frac{\dot{y}}{\dot{x}}=2x.$$

თუ კი, პირიქით, ნიუტონის მიხედვით ჩვენ

$$y+k-x^2=2xh+h^2$$

ანუ

$$(y+k)-y=2xh+h^2\text{-ში}$$

[მივიღებთ $h=0$] (h გადაიქცევა dx სიმბოლოდ მხოლოდ იმის შემდეგ, რაც ის თავის პირვანდელი ფორმით იყო მიღებული $=0$), ჩვენ მივიღებთ $k=0+0=0$ და ერთადერთი აქ მიღებული შედეგი არის დადასტურება ჩვენი გამოსავალი ნამძღვარის, რომ y გადაიქცევა $y+k$ მხოლოდ როცა x გადაიქცევა $x+h$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ, თუ $x+h=x+0=x$, მაშინ $y+k=y$ ე. ი. $k=0$.

მაგრამ ჩვენ არავითარ შემთხვევაში არ მივიღებთ, როგორც ამას ფიქრობდა ნიუტონი:

$$k=2xdx+dxdx,$$

ანუ ნიუტონურ დაწერილობით

$$\dot{y}=2x\dot{x}+\dot{x}\dot{x}.$$

h გადაიქცევა $\dot{x}$-ად, და ამიტომ k გადაიქცევა $\dot{y}$-ად მხოლოდ მას შემდეგ, რაც h-მა შეასრულა დაღმასვლა ჯოჯოხეთში ნულზე გავლით ე. ი. მას შემდეგ, რაც $x_1 - x$ სხვაობა (ანუ $(x+h) - x$), და ამიტომ $y_1 - y (=(y+k) - y)$, მიყვანილია მათ აბსოლუტურ მინიმალურ მნიშვნელობაზე $x - x = 0$ და $y - y = 0$.

მაგრამ რადგან ნიუტონი არ განსაზღვრავს x, y etc. ნაზრდებს მათემატიკურ გამოყვანის (Ableitung) გზით, არამედ ერთბაშად აშტემპელებს მათ დიფერენციალებში $\dot{x}$, $\dot{y}$, etc., უკანასკნელები არ შეიძლება იყოს $=0$, რადგან სხვანაირად შედეგში მივიღებთ 0-ს. მართლაც, ალგებრულად მიღება ამ ნაზრდების თავიდანვე $=0$ მიგვიყვანს მხოლოდ იმაზე, რაზედაც ზემოთ მიღება ერთბაშადვე $h=0$, და მაშასადამე აგრეთვე $k=0$, განტოლებაში $(y+k) - y = 2xh + h^2$, ე. ი. საბოლოო ანგარიშში $0=0$-კენ. h არ უნდა იყოს მიღებული ნულის ტოლი სანამ x-ის პირველი წარმოებული ფუნქცია, აქ $2x$, არ იქნება განთავისუფლებული გაყოფის საშუალებით h მამრავლისაგან.

ამგვარად ვღებულობთ

$$\frac{y_1 - y}{h} = 2x + h.$$

მხოლოდ ახლა შეიძლება მოხსნილი იყოს სასრული სხვაობა. ამიტომ აგრეთვე დიფერენციალური კოეფიციენტიც $\frac{dy}{dx} = 2x$ უნდა იყოს ადრევე გამოყვანილი, სანამ ჩვენ შევძლებთ $dy = 2xdx$ დიფერენციალის მიღებას.

ამგვარად, არაფერი სხვა არ რჩება გარდა იმისა, რომ წარმოვიდგინოთ ცვლადების ნაზრდები როგორც უსასრულოდ მცირე ნაზრდები და მივაწეროთ მათ როგორც ასეთებს თ ა ვ ი ს თ ა ვ ა დ ი (selbständige) ა რ ს ე ბ ო ბ ა, მაგალითად სიმბოლოებში $\dot{x}$, $\dot{y}$ ან dx, dy. მაგრამ უსასრულოდ მცირე სიდიდეები აგრეთვე სიდიდეები არიან, როგორც უსასრულოდ დიდები (სიტყვა „უსასრულოდ" ნიშნავს მხოლოდ განუზღვრელად მცირეს). ამიტომ dx, dy etc. ან $\dot{x}$, $\dot{y}$ ფიგურირებენ გამოთვლებში ზემოთ მოყვანილ განტოლებაში

$$y + k - y \text{ ანუ } k = 2xdx + dxdx$$

ისევე, როგორც ჩვეულებრივი ალგებრული სიდიდეები. $dxdx$ აქვს არსებობის ისეთივე უფლება, როგორც $2xdx$.

$y = u\dot{z} + z\dot{u} + \dot{u}\dot{z}$-ში შესაკრების $\dot{u}\dot{z}$ მოსპობით, მისი უსასრულოდ სიმცირის გამო $\dot{u}\dot{z}$ ან $\dot{z}\dot{u}$-თან შედარებით, ჩვენ შეგვეძლო მათემატიკურად გვეშველა ჩვენთვის მხოლოდ იმით, რომ გვეყურებინა $u\dot{z} + \dot{z}u$-თვის როგორც მხოლოდ მიახლოვებით მნიშვნელობისათვის, რომელიც რაგინდ ახლოს შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ზუსტთან. მსგავსი მანევრი გვხვდება ჩვეულებრივ ალგებრაშიაც. მაგრამ მაშინ გამოდის კიდევ უფრო დიდი სასწაული: ამ მეთოდით ჩვენ ვღებულობთ x-ის წარმოებულ ფუნქციისათვის არა მიახლოვებით, არამედ სრულებით ზუსტ (თუნდაც, როგორც ზემოთ, მხოლოდ სიმბოლიურად სწორ) მნიშვნელობას. ასე $\dot{x}\dot{x}$-ის უკუგდებით მაგალითში $y = 2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x}$ ჩვენ ვღებულობთ $u = 2x\dot{x}$ და $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x$, რაც წარმოადგენს მართლაც x^2-ის პირველ წარმოებულ ფუნქციას, როგორც ამას ამტკიცებს უკვე ბინომი.

მაგრამ სასწაული არ წარმოადგენს არავითარ სასწაულს. იქნებოდა მართლაც სასწაული, რომ $\dot{x}\dot{x}$-ის ნაძალადევი მოსპობით **არ მიგვეღო ზუსტი შედეგი.** სახელდობრ, **ისპობა მხოლოდ გამოთვლის შეცდომა, როგორც აუცდენელი** შედეგი მეთოდისა, რომელსაც შემოყავს ცვლადის განუზღვრელი ნაზრდი, მაგალითად h, ერთბაშადვე როგორც დიფერენციალი dx ან $\dot{x}$, როგორც მზა ოპერატიული სიმბოლო და ამით თავიდანვე ამყარებს დიფერენციალურ აღრიცხვაში მისთვის დამახასიათებელ, ჩვეულებრივ ალგებრისაგან განსხვავებულ აღრიცხვის ხერხს.

---

1) თუ x, ცვალებისას, გადაიქცევა x_1-ად, მაშინ $A)$ $x_1 - x = \Delta x$, საიდანაც გამომდინარეობს: $Aa)$ $\Delta x = x_1 - x$.

$a)$ $x_1 - \Delta x = x$.

Δx, **სხვაობა** x_1 და x-ის, გამოსახული ამგვარად დადებითად, როგორც x-ის **ნაზრდი**, რადგან თუ მას გამოვაკლებთ x_1-ს, უკანასკნელი დაუბრუნდება თავის პირვანდელ მდგომარეობას ე. ი. x.

სხვაობა, ამგვარად, შეიძლება ორნაირად გამოსახული იყოს: **უშუალოთ როგორც სხვაობა** გაზრდილ ცვლადის და მის მდგომარეობის შორის გაზრდამდე, — და ეს არის მისი **უარყოფითი გამოხატულება** — და დადებითად — როგორც ნაზრდი

(როგორც ინკრემენტი ან დეკრემენტი)[1], როგორც შედეგი: როგორც x-ის ნაზრდი მის იმ მდგომარეობისათვის, როცა ის ჯერ კიდევ გაზრდილი არაა — და ეს დადებითი გამოსახულებაა.

ჩვენ დავინახავთ როგორ როლს დიფერენციალურ აღრიცხვის ისტორიაში თამაშობს ეს ორნაირი გაგება.

b) $x_1 = x + \Delta x$.

x_1 არის თვით გაზრდილი x, მისი ზრდა განუყოფელია მისგან. x_1 არის მისი ზრდის სრულებით განუსაზღვრელი ფორმა; ეს ფორმა ანსხვავებს გაზრდილს x-ს, სახელდობრ x_1-ს, მის საწყის ფორმისაგან გაზრდამდე, x-გან, მაგრამ არ ანსხვავებს x-ს თვით მის ნაზრდისაგან. დამოკიდებულება x_1 და x შორის შეიძლება ამიტომ გამოსახული იყოს მხოლოდ უარყოფითად, როგორც სხვაობა, როგორც $x_1 - x$. პირიქით $x_1 = x + \Delta x$-ში

1) სხვაობა გამოსახულია დადებითად როგორც x-ის ნაზრდი.

2) მისი ზრდა ამიტომ გამოსახულია არა როგორც სხვაობა, არამედ როგორც ჯამი თითონ მისი, საწყის მდგომარეობაში, + მისი ნაზრდი.

3) ტექნიკური თვალსაზრისით x გადაიქცევა მონომიდან ბინომში, ისე რომ ყველგან სადაც პირველად ფუნქციაში შედიოდა x რაიმე ხარისხში, ეხლა გაზრდილ x-ის ნაცვლად გამოდის ბინომი, რომელიც შესდგება თითონ x-გან და მის ნაზრდისაგან, საერთოდ x^m-ის ნაცვლად ბინომი $(x+h)^m$. გაშლა x-ის ზრდისა ხდება ამგვარად ბინომის შესახებ თეორემის უბრალო გამოყენებად. რადგან x გამოდის როგორც პირველი, ხოლო Δx როგორც მეორე წევრი ამ ბინომის, რაც მოცემულია თვით მათ ურთიერთ დამოკიდებულებით, ვინაიდან x უნდა არსებობდეს მისი Δx ნაზრდის გაჩენამდე, ამიტომ ნამდვილად ბინომის საშუალებით იქმნება მხოლოდ x-ის ფუნქციები, იმ დროს როცა Δx ფიგურირებს მათთან როგორც მამრავლი მოზარდ ხარისხებში, და ამასთანავე ისე, რომ Δx პირველ ხარისხში ანუ $(\Delta x)^1$ უნდა იყოს წკრივის მეორე წევრის მამრავლი ე. ი. მამრავლი ბინომის თეორემის საშუალებით წარმოებულ x-ის პირველ ფუნქციისა. ეს მჟღავნდება უკვე როცა x მოცემულია მეორე ხარისხში. x^2 გადაიქცევა $(x+\Delta x)^2$-ად, რაც სხვა არაფერია, გარდა $x+\Delta x$-ის თავის თავზე გამრავლებისა. შედეგად ჩვენ ვღებულობთ $x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$, საიდანაც სჩანს, რომ პირველი წევრი უნდა იყოს x-ის პირველადი ფუნქცია, ხოლო x^2-ის პირველი

[1] «ან დეკრემენტი» მიწერილია ფანქრით.

წარმოებული ფუნქცია, ამ შემთხვევაში $2x$, შეადგენს მეორე წევრს მამრავლით Δx, რომელიც პირველ წევრში გამოდის მხოლოდ როგორც მამრავლი $(\Delta x)^0 = 1$. წარმოებული მოინახება ამგვარად არა დიფერენცირებით, არამედ ბინომის შესახებ თეორემის გამოყენების საშუალებით, ე. ი. გ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ი ს ს ა შ უ ა ლ ე ბ ი თ, და ამასთანავე სწორედ იმის გამო, რომ გაზრდილი x თავიდანვე ფიგურირებს როგორც ბინომი, როგორც $x + \Delta x$.

4) თუმცა $x + \Delta x$-ში Δx, რაც შეეხება მის სიდიდეს, არის ისევე განუზღვრელი, როგორც თვით განუზღვრელი x ცვლადი, მაინც Δx განზღვრულია როგორც x-გან განსხვავებული, თავისთავადი სიდიდე, როგორც ნაყოფი დედა მისის გვერდით მანამ, სანამ ის დაორსულდა. $x + \Delta x$ არა უბრალოდ განუზღვრელად გამოთქვამს, რომ x სიდიდე როგორც ცვლადი გაიზარდა, არამედ გამოთქვამს აგრეთვე რ ა მ დ ე ნ ა დ ის გაიზარდა, სახელდობრ Δx-ით.

5) x არსად არ გამოდის როგორც x_1; მთელი განვითარება ტრიალებს ნაზრდის გარშემო, როგორც კი წარმოებული მონახულია ბინომის შესახებ თეორემის გამოყენების საშუალებით, ე. ი. $x + \Delta x$-ის x-ის ნაცვლად ჩასმის საშუალებით x-ის გარკვეულ ხარისხში. მხოლოდ მარცხენა მხარეზე, როცა $\frac{y_1 - y}{\Delta x}$-ში Δx ხდება$=0$, ის ჩნდება ბოლოს კვლავ როგორც$= x_1 - x$, ისე რომ

$$\frac{y_1 - y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}\left(= \frac{\Delta y}{\Delta x}\right).$$

ამგვარად დადებითი მხარე, რომელიც მდგომარეობს $x_1 - x$ სხვაობის ნულთან გატოლებაში, სახელდობრ x_1-ის ქმნადობა (Werden) x-ის ტოლად, არსად განვითარებაში არ შეიძლება წარმოგვიდგეს, რადგან x_1 არსად არ მონაწილეობს გაშლილ წკრივის მხარეზე. ამგვარად დიფერენციალური აღრიცხვის ნამდვილი საიდუმლოება არსად გარეთ არ გამოდის.

6) თუ $y = f(x)$ და $y_1 = f(x + \Delta x)$, ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ამ მეთოდში y_1-ის გაშლა [წკრივად] უ კ ვ ე წ ყ ვ ე ტ ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ს მ ო ნ ა ხ ვ ი ს ა მ ო ც ა ნ ა ს.

c) $x + \Delta x = x_1$[1] (მაშასადამე აგრეთვე $y + \Delta y = y_1$).

Δx შეიძლება გაჩნდეს აქ მხოლოდ $\Delta x = x_1 - x$ ფორმით ე. ი.

---

[1] ე. ი. $x + \Delta x$ შებრუნებით გამოისახება x_1 ფორმით.

უარყოფით ფორმით, სხვაობის ფორმით x_1 და x-ის შორის, და არა დადებით ფორმით, Δx ნაზრდის სახით, როგორც $x_1 = x + \Delta x$-ში.

1) აქ გაზრდილი x, როგორც x_1, განსხვავდება თავისთავისაგან გაზრდამდე ე. ი. x-გან, მაგრამ x_1 არ გამოდის როგორც x გაზრდილი Δx-ით, ამიტომ x_1 რჩება ნამდვილად ისევე განუზღვრელი, როგორც x.

2) შემდეგ, x_1 შედის საწყის ფუნქციაში, შეცვლილში x-ის გაზრდის გამო, სრულებით ისევე როგორც x თავის საწყის ფუნქციაში. მაგალითად, თუ x შედის ფუნქციაში x^3, მაშინ x_1 — ფუნქციაში $x_1{}^3$. მაშინ როცა წინად x-ის შეცვლისას $x + \Delta x$-ით პირველად ფუნქციაში წარმოებული მიწოდებული იყო ბინომით სრულებით მზა სახით, თუმცალა Δx მამრავლით დატვირთული (behaftet) და სხვა წევრების წინამძღოლად გამოსული, რომლებიც x-გან შემდგარია და h^2 etc. მამრავლების მქონე, ახლა $x_1{}^3$ მონომის უშუალო ფორმიდან ისევე ნაკლებად შეიძლება გამოყვანილი იყოს უშუალოდ x-ის ნაზრდი, როგორც შეიძლებოდა მისი გამოყვანა x^3-დან. მაგრამ რაც ამით მოცემულია, ესაა სხვაობა $x_1{}^3 - x^3$. ჩვენ ალგებრიდან ვიცით, რომ ყველა სხვაობები სახისა $x^3 - a^3$ იყოფა $x - a$-ზე, მაშასადამე ამ შემთხვევაში $x_1 - x$-ზე. თუ, მაშასადამე, $x_1{}^3 - x^3$ გავყოფთ $x_1 - x$-ზე (იმის ნაცვლად, რომ, როგორც წინად, გავამრავლოთ $x + \Delta x$ თავის თავზე იმდენჯერ რამდენიც ნაჩვენებია მის ხარისხის მაჩვენებლებში), ჩვენ მივიღებთ $(x_1 - x)P$ სახის გამოთქმას, და ამასთანავე საქმე არ იცვლება იმის გამო, წარმოადგენს პირველადი ფუნქცია მრავალწევრს (ე. ი. შეიცავს x სხვადასხვა ხარისხებში) თუ, როგორც ჩვენს შემთხვევაში, მხოლოწევრს. ეს $x_1 - x$ გადაიქცევა გაყოფის საშუალებით $y_1 - y$-ის მნიშვნელად მარცხენა მხარეზე, და ამგვარად იქ შედგება $\dfrac{y_1 - y}{x_1 - x}$, ფუნქციის სხვაობის x დამოუკიდებელ ცვლადის სხვაობაზე შეფარდება, მათ აბსტრაქტულ ფორმაში სხვაობათა. x_1-ში გამოსახულ ფუნქციის და x-ში გამოსახულ ფუნქციის სხვაობის დაშლა წევრებად, ყოველ რომელთაგანს აქვს მამრავლად $x_1 - x$, შეუძლია, პირველად ფუნქციის თვისებების მიხედვით, დასჭირდეს ბევრი თუ ნაკლები ალგებრული მანევრი, მაშასადამე არ შესრულდება ყოველთვის ისე ადვილად, როგორც $x_1{}^3 - x^3$-ის შემთხვევაში. მაგრამ ეს მეთოდში არაფერს ცვლის. იქ, სადაც პირველადი ფუნქცია თვით თავის ბუნების

მიხედვით არ ხდის შესაძლებლად რაიმე უშუალო დაშლას (x_1-x) P-ად როგორც ამას ჰქონდა ადგილი $f(x)=uz$-თვის (ორი x-გან დამოკიდებული ცვლადი), მამრავლი x_1-x ჩნდება $\frac{1}{x_1-x}$ მამრავლის სახით. შემდეგ, იქ სადაც მარცხენა მხარეზე x_1-x-ის მოცილებით, მასზე ორივე მხარის გაყოფის საშუალებით, თითონ P-ში კიდევ რჩება x_1-x (როგორც მაგალითად $y=a^x$-ის წარმოებულის გამოყვანისას, სადაც ჩვენ ვპოულობთ

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=a^x[(a-1)+\frac{x_1-x-1}{1\cdot 2}(a-1)^2+\text{etc.}],$$

და სადაც მიღება $x_1-x=0$ იძლევა

$$=a^x[(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\text{etc.}]),$$

ეს x_1-x შეიძლება, როგორც ახლახანს მოყვანილ მაგალითში, შევიდეს მხოლოდ ისე, რომ $x_1-x=0$ მიღებისას მის ადგილზე ყოველთვის დარჩეს გარკვეული შედეგი. სხვა სიტყვებით, ეს დარჩენილი P-ში x_1-x არ შეიძლება შეერთებული იყოს P-ს სხვა ელემენტებთან **როგორც მამრავლი.** წინააღმდეგ შემთხვევაში P შეიძლებოდა წარმოგვედგინა $P=p(x_1-x)$ სახით, და ამიტომ, რადგან x_1-x იყო უკვე მიღებული $=0$, სახით $p\cdot 0$, რაც იმას მოასწავებდა, რომ $P=0$.

პირველი სასრული სხვაობა $x_1^3-x^3$ (თუ $y=x^3$ და $y_1=x_1^3$) ვითარდება ამგვარად $y_1-y=(x_1-x)P$-ში, საიდანაც $\frac{y_1-y}{x_1-x}=P$. P — გამოსახულება, რომელიც x_1-ის და x-ის კომბინაციას წარმოადგენს, ტოლია f^1, პირველ სასრულო სხვაობიდან წარმოებულის, საიდანაც x_1-x ისევე გამორიცხულია, როგორც უფრო მაღალი ხარისხებიც $(x_1-x)^2$ და ა. შ. x_1 და x შეუძლიათ ამიტომ კომბინირება მხოლოდ დადებით გამოსახულებებად, როგორიცაა x_1+x, x_1x, $\frac{x_1}{x}$, $\sqrt{x_1x}$ etc. მაშასადამე, თუ ჩვენ მივიღებთ ეხლა $x_1=x$, ეს გამოსახულებანი გადაიქცევიან შესაბამისად $2x$, x^2, $\frac{x}{x}$ ანუ 1, $\sqrt{xx}$ ანუ x, etc., და მხოლოდ მარცხენა მხარეზე, სადაც x_1-x შეადგენს მნიშვნელს, ჩნდება 0, საიდანაც — სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტები etc.

II

განვითარების ისტორიული მსვლელობა

1) მისტიკური დიფერენციალური აღრიცხვა.

$x_1 = x + \Delta x$ თავიდანვე გადაიქცევა $x_1 = x + dx$ ანუ $= x + \dot{x}$, სადაც dx წამძღვარებულია მეტაფიზიკურ გარკვევის (Erklärung) საშუალებით. ჯერ არსებობს, და მერე ირკვევა.

მაგრამ მაშინ აგრეთვე $y_1 = y + dy$ ანუ $y_1 = y + \dot{y}$. ამ ნებსით (willkürlich) დაშვებიდან გამომდინარეობს როგორც დასკვნა, რომ სწორი შედეგის მისაღებად საჭიროა ბინომის $x + \Delta x$ ან $x + \dot{x}$ დაშლაში უკუვაგდოთ (wegeskamotieren) x და Δx-ის შემცველი წევრები, მიღებული პირველი წარმოებულის გვერდით და ა. შ.

რადგან დიფერენციალურ აღრიცხვის ფაქტიურ აგებისას გამოდიან ამ უკანასკნელ შედეგიდან, სახელდობრ დიფერენციალურ ნაწილაკებიდან (Differentiellen)[1], რომელნიც წასწრებულად არის აღებული, არ გამოიყვანებიან, არამედ წაემძღვარებიან ახსნა-გარკვევის საშუალებით, ამიტომ ამავე გარკვევის საშუალებით წასწრებულადვე არის აღებული $\frac{dy}{dx}$ ანუ $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ — სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტი.

თუ x-ის ნაზრდი $= \Delta x$, ხოლო ნაზრდი მისგან დამოკიდებული ცვლადისა $= \Delta y$, თავისთავად იგულისხმება, რომ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ წარმოადგენს x და y ნაზრდების შეფარდებას. მაგრამ ის, რომ Δx წარმოგვიდგება მნიშვნელში, ე. ი. დამოუკიდებელ ცვლადის ნაზრდი დგას მნიშვნელში მრიცხველის ნაცვლად, და არა პირიქით — ეს გამოდის იმის გამო, რომ თვით დიფერენციალურ ფორმების განვითარების უკანასკნელი შედეგი, სახელდობრ დიფერენციალი (das Differential) $[dy = f'(x)\,dx]$, დიფერენციალურ ნაწილაკების (Differentiellen $[dy$ და $dx]$ წასწრებულად აღებისას, აგრეთვე თავიდანვე მოცემულია.

თუ მე ავიღებ უმარტივეს ურთიერთდამოკიდებულებას დამოკიდებულ y ცვლადის და დამოუკიდებელ x ცვლადის, სახელდობრ $y = x$, მე ვიცი, რომ $dy = dx$ ანუ $\dot{y} = \dot{x}$. მაგრამ რადგან მე ვეძებ

[1] იხ. შენიშვნა გვ. 31.

წარმოებულს დამოუკიდებელი x ცვლადით, მე უნდა გავყო ორივე მხარე dx-ზე ანუ $\dot{x}$-ზე; ამგვარად

$$\frac{dy}{dx} \text{ ანუ } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1.$$

მაშასადამე, მე ვიცი ერთხელ და სამუდამოდ, რომ სიმბოლიურ დიფერენციალურ კოეფიციენტში ნაზრდი (დამოუკიდებელ ცვლადის) უნდა იდგეს მნიშვნელში და არა მრიცხველში.

მაგრამ დაწყებული x-ის მეორე ხარისხის ფუნქციისაგან, წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი მოინახება ერთბაშად ბინომის დაშლის საშუალებით, რომელშიაც ის ჩნდება სრულებით მზად მეორე წევრში, dx-ის ანუ $\dot{x}$-ის თანხლებით ე. ი. ნაზრდის პირველი ხარისხისა + უკუსაგდებად განკუთვნილი (wegzueskamotierende) წევრები. მაგრამ ეს უ კ უ გ დ ე ბ ა (Eskamotage), თუმცა არა გაცნობიერებული სახით, მათემატიკურად სწორია, რადგან უკუგდებულია მხოლოდ გამოთვლის შეცდომა, რომელიც ჩნდება თავიდანვე პირველად უკუგდებისაგან (Eskamotage).

$x_1 = x + \Delta x$ უნდა მხოლოდ გადავაქციოდ $x_1 = x + dx$ ანუ $x + \dot{x}$ და შემდეგ დაგვრჩენია ვიმოქმედოთ ამ დიფერენციალურ ბინომზე, როგორც ჩვეულებრივზე, რაც ტექნიკური თვალსაზრისით ძალიან მოხერხებულია.

დაგვრჩა ვუპასუხოთ კიდევ ერთ კითხვაზე: რა საფუძვლით ხდება ნაძალადევი მოსპობა გზაზე მდგომ წევრებისა?

ეს ხომ უკვე წინასწარ გულისხმობს, რომ იციან, რომ ისინი დგანან გზაზე და ნამდვილად არ ეკუთვნიან წარმოებულს. პ ა ს უ ხ ი ძალიან მარტივია: ეს ნახეს წმინდა ექსპერიმენტალური გზით. იმ დროს ცნობილი იყვნენ ნამდვილი წარმოებულები x-ის მრავალი და უფრო რთული ფუნქციებისაც მათი ანალიზური ფორმით მრუდთა განტოლებისა. მაგრამ უამისოდაც ის გარემოება, რომ მეორის მომდევნო წევრები არ ეკუთვნიან წარმოებულს, აღმოაჩინეს უკვე თვით პირველ შესაძლებელ გადამწყვეტ ექსპერიმენტში, სახელდობრ მეორე ხარისხის უმარტივეს ალგებრულ ფუნქციების განხილვისას. მაგალითად

$$y = x^2$$

$$y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2x dx + dx^2,$$

$$y + \dot{y} = (x + \dot{x})^2 = x^2 + 2x\dot{x} + \dot{x}^2.$$

თუ ორივე მხარეს გამოვაკლებთ პირველად ფუნქციას x^2 ($y=x^2$), მივიღებთ

$$dy = 2xdx + dx^2$$
$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}^2.$$

თუ ორივე ტოლობის უკანასკნელ წევრებს მოვსპობთ, გვექნება

$$dy = 2xdx,$$
$$\dot{y} = 2x\dot{x}$$

და შემდეგ

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

ანუ

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x.$$

მაგრამ ცნობილია, რომ $(x+a)^2$ ბინომის დაშლაში პირველი წევრი არის x^2, მეორე $2xa$. თუ ამ უკანასკნელ გამოსახულებას გავყოფთ a-ზე, როგორც ზემოთ $2xdx$ dx-ზე ან $2x\dot{x}$ $\dot{x}$-ზე, ჩვენ მივიღებთ $2x$, როგორც x^2-ის პირველ წარმოებულს, როგორც ნაზრდს, გამოსახულს x-ში, რომელიც ბინომმა დაუმატა x^2-ს. მაშასადამე წარმოებულის მისაღებად აუცილებელი იყო მოსპობა dx^2 ანუ $\dot{x}\dot{x}$ სრულებით იმაზე ყურადღების მიუქცევლად, რომ თავისთავად ამ dx^2-ის ანუ $\dot{x}\dot{x}$-ის დაძლევა შეუძლებელი იყო.

ამგვარად ექსპერიმენტალური გზით — უკვე მეორე ნაბიჯზე — ჩვენ ერთნაირის აუცილებლობით მივდივართ იმის გაგებისაკენ, რომ არა მარტო ჭეშმარიტის, არამედ საერთოდ რომელიც არ უნდა იყოს შედეგის მისაღებად უნდა უკუვაგდოთ dx^2 ანუ $\dot{x}\dot{x}$.

მეორე მხრით, $2xdx + dx^2$ ან $2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x}$-ში არის ჩვენს წინაშე $(x+dx)^2$ ან $(x+\dot{x})^2$ ბინომის მეორე და მესამე წევრის სწორი მათემატიკური გამოსახვა. რომ ეს მათემატიკურად სწორი შედეგი ემყარება ასევე მათემატიკურად თვით საფუძველში ყალბ დაშვებას, სახელდობრ თავიდანვე $x_1 - x = \Delta x$-ის $x_1 - x = dx$-ით ანუ $\dot{x}$-ით შეცვლას, — ეს არ იცოდენ. წინააღმდეგ შემთხვევაში ასეთივე შედეგს მიიღებდენ არა ოინის (Eskamotage), არამედ უმარტივეს სტილის ალგებრულ ოპერაციის საშუალებით და ამ სახით მოაწოდებდენ მას მათემატიკურ სამყაროს.

ამგვარად თითონ სჯეროდათ მისტიკური ხასიათი ახლად აღმოჩენილ აღრიცხვის, რომელიც იძლეოდა სწორ (და ამასთანავე გეომეტრიულ გამოყენებებში პირდაპირ განსაცვიფრებელ) შედეგებს მათემატიკურად გარკვეულად არასწორი გზით. ამგვარად თავის თავსვე ამისტიფიცირებდენ და მით უფრო აფასებდენ ახალ აღრიცხვას, მით უფრო აბრაზებდენ ძველ ორტოდოქსალურ მათემატიკოსთა გროვას და იწვევდენ ამგვარად მტრულ ყვირილს, რომელმაც გამოძახილი ჰპოვა მათემატიკის არმცოდნე ხალხშიც და აუცილებელი იყო იმისათვის, რომ ახლისათვის გაეკაფა გზა.

2) რაციონალური დიფერენციალური აღრიცხვა.

დ'ალამბერი იწყებს უშუალოდ ნიუტონის და ლეიბნიცის გამოსავალ პუნქტიდან: $x_1 = x + dx$. მაგრამ მას შეაქვს ერთბაშად ფუნდამენტალური შესწორება: $x_1 = x + \Delta x$ ე. ი. $x +$ განუზღვრელი მაგრამ prima faciae სასრული ნაზრდი, რომელსაც ის აღნიშნავს h-ით. გადაქცევა ამ h ანუ Δx-ის dx-ად (ის, ისევე როგორც ყველა ფრანგები, მისდევს ლეიბნიციანურ აღნიშვნებს) ხდება როგორც განვითარების საბოლოო შედეგი ან ყოველ შემთხვევაში უშუალოდ ბოლოს წინ, იმ დროს როცა მისტიკოსებთან და აღრიცხვის ინიციატორებთან ის არის გამოსავალი პუნქტი (დ'ალამბერი თითონ გამოდის სიმბოლიურ მხარიდან, მაგრამ მანამ სანამ ის გადაიქცევა სიმბოლოდ).

ამით მიღწეულია ერთბაშად ორმაგი[1] შედეგი:

a) სხვაობათა შეფარდებას $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x_1-x}$

თავის შედგენის გამოსავალ პუნქტად აქვს 1) $f(x+h)-f(x)$, რაც შეესაბამება x-ში მოცემულ ალგებრულ ფუნქციას, რომელიც მიიღება როცა პირველად ფუნქციაში, მაგალითად x^3-ში, x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ თითონ მას მისი ნაზრდით ე. ი. $x+h$. ეს ფორმა ($=y_1-y$ თუ $y=f(x)$) არის ფუნქციათა სხვაობის ფორმა, რომელიც ფუნქციის ნაზრდის დამოუკიდებელ ცვლადის ნაზრდთან შეფარდებად გარდასაქმნელად მოითხოვს განვითარებას, რომელიც მაშასადა-

[1] შედეგი აღმოჩნდა არა ორმაგი, არამედ უფრო რთული და მარქსმა შემდეგში უარი სთქვა ორმაგ ნუმერაციიდან—ასოებით და რიცხვებით, რის გამო a) პუნქტს b) პუნქტი არ მოჰყოლია.

თუ ორივე მხარეს გამოვაკლებთ პირველად ფუნქციას x^2 $(y=x^2)$, მივიღებთ

$$dy = 2xdx + dx^2$$
$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}^2.$$

თუ ორივე ტოლობის უკანასკნელ წევრებს მოვსპობთ, გვექნება

$$dy = 2xdx,$$
$$\dot{y} = 2x\dot{x}$$

და შემდეგ

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

ანუ

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x.$$

მაგრამ ცნობილია, რომ $(x+a)^2$ ბინომის დაშლაში პირველი წევრი არის x^2, მეორე $2xa$. თუ ამ უკანასკნელ გამოსახულებას გავყოფთ a-ზე, როგორც ზემოთ $2xdx$ dx-ზე ან $2x\dot{x}$ $\dot{x}$-ზე, ჩვენ მივიღებთ $2x$, როგორც x^2-ის პირველ წარმოებულს, როგორც ნაზრდს, გამოსახულს x-ში, რომელიც ბინომმა დაუმატა x^2-ს. მაშასადამე წარმოებულის მისაღებად აუცილებელი იყო მოსპობა dx^2 ანუ $\dot{x}\dot{x}$ სრულებით იმაზე ყურადღების მიუქცევლად, რომ თავისთავად ამ dx^2-ის ანუ $\dot{x}\dot{x}$-ის დაძლევა შეუძლებელი იყო.

ამგვარად ექსპერიმენტალური გზით — უკვე მეორე ნაბიჯზე — ჩვენ ერთნაირის აუცილებლობით მივდივართ იმის გაგებისაკენ, რომ არა მარტო ჭეშმარიტის, არამედ საერთოდ რომელიც არ უნდა იყოს შედეგის მისაღებად უნდა უკუვაგდოთ dx^2 ანუ $\dot{x}\dot{x}$.

მეორე მხრით, $2xdx + dx^2$ ან $2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x}$-ში არის ჩვენს წინაშე $(x+dx)^2$ ან $(x+\dot{x})^2$ ბინომის მეორე და მესამე წევრის სწორი მათემატიკური გამოსახვა. რომ ე ს მ ა თ ე მ ა ტ ი კ უ რ ა დ ს წ ო რ ი შ ე დ ე გ ი ე მ ყ ა რ ე ბ ა ა ს ე ვ ე მ ა თ ე მ ა ტ ი კ უ რ ა დ თ ვ ი თ ს ა ფ უ ძ ვ ე ლ შ ი ყ ა ლ ბ დ ა შ ვ ე ბ ა ს, სახელდობრ თავიდანვე $x_1 - x = \Delta x$-ის $x_1 - x = dx$-ით ანუ $\dot{x}$-ით შეცვლას,—ეს არ იცოდენ. წინაამდეგ შემთხვევაში ასეთივე შედეგს მიიღებდენ არა ოინის (Eskamotage), არამედ უმარტივეს სტილის ალგებრულ ოპერაციის საშუალებით და ამ სახით მოაწოდებდენ მას მათემატიკურ სამყაროს.

ამგვარად თითონ სჯეროდათ მისტიკური ხასიათი ახლად აღმოჩენილ აღრიცხვის, რომელიც იძლეოდა სწორ (და ამასთანავე გეომეტრიულ გამოყენებებში პირდაპირ განსაცვიფრებელ) შედეგებს მათემატიკურად გარკვეულად არასწორი გზით. ამგვარად თავის თავსვე ამისტიფიცირებდენ და მით უფრო აფასებდენ ახალ აღრიცხვას, მით უფრო აბრაზებდენ ძველ ორტოდოქსალურ მათემატიკოსთა გროვას და იწვევდენ ამგვარად მტრულ ყვირილს, რომელმაც გამოძახილი ჰპოვა მათემატიკის არმცოდნე ხალხშიც და აუცილებელი იყო იმისათვის, რომ ახლისათვის გაეკაფა გზა.

2) რაციონალური დიფერენციალური აღრიცხვა. დ'ალამბერი იწყებს უშუალოდ ნიუტონის და ლეიბნიცის გამოსავალ პუნქტიდან: $x_1=x+dx$. მაგრამ მას შეაქვს ერთბაშად ფუნდამენტალური შესწორება: $x_1=x+\Delta x$ ე. ი. $x+$ განუზღვრელი მაგრამ prima faciae სასრული ნაზრდი, რომელსაც ის აღნიშნავს h-ით. გადაქცევა ამ h ანუ Δx-ის dx-ად (ის, ისევე როგორც ყველა ფრანგები, მისდევს ლეიბნიციანურ აღნიშვნებს) ხდება როგორც განვითარების საბოლოო შედეგი ან ყოველ შემთხვევაში უშუალოდ ბოლოს წინ, იმ დროს როცა მისტიკოსებთან და აღრიცხვის ინიციატორებთან ის არის გამოსავალი პუნქტი (დ'ალამბერი თითონ გამოდის სიმბოლიურ მხარიდან, მაგრამ მანამ სანამ ის გადაიქცევა სიმბოლოდ).

ამით მიღწეულია ერთბაშად ორმაგი[1] შედეგი:

$$a) \text{ სხვაობათა შეფარდებას } \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{x_1-x}$$

თავის შედგენის გამოსავალ პუნქტად აქვს 1) $f(x+h)-f(x)$, რაც შეესაბამება x-ში მოცემულ ალგებრულ ფუნქციას, რომელიც მიიღება როცა პირველად ფუნქციაში, მაგალითად x^3-ში, x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ თითონ მას მისი ნაზრდით ე. ი. $x+h$. ეს ფორმა ($=y_1-y$ თუ $y=f(x)$) არის ფუნქციათა სხვაობის ფორმა, რომელიც ფუნქციის ნაზრდის დამოუკიდებელ ცვლადის ნაზრდთან შეფარდებად გარდასაქმნელად მოითხოვს განვითარებას, რომელიც მაშასადა-

---

[1] შედეგი აღმოჩნდა არა ორმაგი, არამედ უფრო რთული და მარქსმა შემდეგში უარი სთქვა ორმაგ ნუმერაციიდან—ასოებით და რიცხვებით, რის გამო a) პუნქტს b) პუნქტი არ მოჰყოლია.

შე თამაშობს რეალურ როლს და არა წმინდა ნომინალურს, როგორც მისტიკოსებთან. მართლაც, თუ მე მაქვს მათთან

$$f(x)=x^3,$$

$$f(x+h)=(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3,$$

მე უკვე წინასწარ ვიცი, რომ ტოლობის პირისპირ მდგომი მხარეები

$$f(x+h)-f(x)=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3$$

დაიყვანება ნაზრდებზე. არცაა საჭირო ამ სხვაობათა დაწერა, რადგან მე ვხედავ მეორე მხარეზე, რომ x^3-ის ნაზრდი = სამ შემდგომ წევრების, ისევე როგორც $f(x+h)-f(x)$-ში რჩება მხოლოდ $f(x)$-ის ნაზრდი ანუ dy. ამგვარად პირველი სხვაობითი განტოლება თუ კი თამაშობს, მხოლოდ ისეთ როლს, რომელიც თავიდანვე კვლავ ქრება. ორივე მხარეზე უკვე თავიდანვე ერთიმეორეს უპირისპირდება ნაზრდები, და მაქვს რა ისინი, მე მაქვს, თანახმად dx და dy-ის განმარტებისა, მათი შეფარდება $\frac{dy}{dx}$ ანუ $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ etc. ამგვარად $\frac{dy}{dx}$ ანუ $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$-ის მისაღებად მე სრულებით არ მჭირდება პირველი სხვაობა, შედგენილი x-ის პირველად ფუნქციის გამოკლებით შეცვლილ ($x+h$-ის ჩასმით x-ის ნაცვლად) ფუნქციისაგან (გაზრდილ ფუნქციისაგან).

დ'ალამბერთან კი აუცილებელია ამ სხვაობის შემაგრება, რადგან განვითარება უნდა სწარმოებდეს მასზე. ამიტომ ნაცვლად სხვაობის დადებითი გამოსახულებისა, სახელდობრ ნაზრდისა, მარცხენა მხარეზე გამოდის წინა პლანზე ნაზრდის უარყოფითი გამოსახულება, სახელდობრ $f(x+h)-f(x)$ სხვაობა. და ეს მახვილი სხვაობაზე ნაზრდის ნაცვლად (ფლუქსიები ნიუტონთან) ყოველ შემთხვევაში ნაგრძნობია ლეიბნიციანურ აღნიშვნაში dy წინააღმდეგ ნიუტონიანურისა $\dot{y}$.

2) $f(x+h)-f(x)=3x^2h+3xh^2+h^3$.

ორივე მხარის h-ზე გაყოფით მივიღებთ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2+3xh+h^2.$$

ამით მარცხენა მხარეზე შესდგება

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{x_1-x},$$

რომელიც ჩნდება ამგვარად როგორც ნ ა წ ა რ მ ო ე ბ ი შ ე ფ ა რ დ ე ბ ა ს ა ს რ უ ლ ო ნ ა ზ რ დ ე ბ ი ს ა, იმ დროს როცა მისტიკოსებთან ის იყო მზა შეფარდება ნაზრდებისა, რომლებიც მოცემულია [დიფერენციალური ნაწილაკების] dx ან $\dot{x}$ და dy ან $\dot{y}$ განსაზღვრით.

3) თუ ეხლა $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{x_1-x}$-ში მივიღებთ $h=0$ ან $x_1=x$ და, მაშასადამე, $x_1-x=0$, ეს გამოსახულება გადაიქცევა $\frac{dy}{dx}$-ად, ხოლო ამასთან ერთდროულად h-ის ნულად გადაქცევის გამო წევრები $3xh+h^2$ აგრეთვე გადაიქცევიან ნულად და ამასთანავე სწორი მათემატიკური ოპერაციის საშუალებით.

ჩვენ ვღებულობთ:

4) $\frac{0}{0}$ ანუ $\frac{dy}{dx}=3x^2=f'(x)$.

უკანასკნელი არსებობდა ისევე, როგორც მისტიკოსებთან, უკვე როგორც მოცემული, როგორც კი x გახდა $x+h$. რადგან მიღება $(x+h)^3$ x^3-ის ნაცვლად გვაძლევს: x^3+3x^2h+ etc. სადაც $3x^2$ უკვე ჩნდება წკრივის მეორე წევრში, როგორც h-ის პირველი ხარისხის კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ი. ამიტომ დასკვნა არის არსებითად იგივე, რაც ლეიბნიცთან და ნიუტონთან, მაგრამ მზა წარმოებული $3x^2$ გ ა მ ო ნ თ ა ვ ი ს უ ფ ლ დ ე ბ ა მისი გარემოცვისაგან მკაცრი ალგებრული გზით. აქ არ ხდება $f'(x)$, ამ შემთხვევაში $3x^2$, არავითარი გ ა ნ ვ ი თ ა რ ე ბ ა (Entwicklung), არამედ მისი მხოლოდ გ ა მ ო ნ თ ა ვ ი ს უ ფ ლ ე ბ ა (Loswicklug) მისი მამრავლისაგან h და მასთან გვერდით დაწყობილ წევრებისაგან. მაგრამ რაც ნამდვილად ვითარდება, ეს მარცხენა სიმბოლიური მხარე, სახელდობრ dx და dy და მათი შეფარდება, სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტი $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$ (უფრო სწორედ, პირიქით, $\frac{0}{0}=\frac{dy}{dx}$), რომელმაც თავის მხრით გამოიწვია ერთნაირი მეტაფიზიკური შიშიანობა, თუმცა სიმბოლო გამოყვანილია მათემატიკური გზით.

დიფერენციალურ აღრიცხვიდან მისტიკური სამოსელის მოგლეჯით, დ'ალამბერმა გადადგა უზარმაზარი ნაბიჯი წინ. თუმცა მისი Traité des fluides გამოვიდა 1744 წ. (იხ. გვ. 15)[1], ლეიბნი-

[1] აქ გვ. 62.

ციანური მეთოდი განაგრძობდა საფრანგეთში ბატონობას კიდევ მრავალი წლის განმავლობაში. თითქმის არც არის საჭირო შენიშვნა, რომ ნიუტონი ბატონობდა ინგლისში XIX საუკუნის პირველ ათეულ წლებამდე, მაგრამ აქ, თუმცა უფრო გვიან, ვიდრე საფრანგეთში, აგრეთვე გაბატონდა დალამბერული დაფუძნება, თვით დღევანდელ მომენტამდე, ზოგიერთი მოდიფიკაციებით.

3) წ მ ი ნ დ ა ა ლ გ ე ბ რ უ ლ ი დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი ა ღ რ ი ც ხ ვ ა. ლაგრანჟი «T h é o r i e d e s f o n c t i o n s a n a l y t i q u e s» (1797 და 1813).

პირველი გამოსავალი პუნქტი, როგორც 1) და 2)-ში, იყო გაზრდილი x: თუ y ანუ $f(x) =$ etc., მაშინ y_1 ანუ $f(x+dx)$ მისტიკურ მეთოდში, y_1 ანუ $f(x+h)$ $(=f(x+\Delta x))$ რაციონალურში.

ეს ბინომიალური გამოსავალი პუნქტი გვაძლევს ჩვენ ერთბაშად მეორე მხარეზე ბინომის დაშლას, მაგალითად

$$x^m + mx^{m-1}h + \text{etc.},$$

რომლის უკვე მეორე წევრში, $mx^{m-1}h$-ში მონაწილეობს სრულებით მზა სახით საძიებელი რეალური დიფერენციალური კოეფიციენტი mx^{m-1}.

a) მარცხენა მხარეზე მდგომი $f(x+h)$ შეეფარდება მის პირისპირ მდგომ გაშლილ წკრივს, როგორც კი x-ის მოცემულ პირველად ფუნქციაში x-ის ნაცვლად ჩასმულია $x+h$, სრულებით იმგვარადვე, როგორც ალგებრაში გ ა უ შ ლ ე ლ ი ზ ო გ ა დ ი გ ა მ ო ს ა ხ უ ლ ე ბ ა, და სახელდობრ ისევ ბინომი, შეეფარდება მის შესაბამის გ ა შ ლ ი ლ წ კ რ ი ვ ს, მაგალითად როგორც $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h +$ ect.-ში $(x+h)^3$ შეეფარდება მის ექვივალენტურ გაშლილ წკრივს $x^3 + 3x^2h +$ etc.

ამით $f(x+h)$ წარმოგვიდგება იმავე ალგებრულ დამოკიდებულებაში (მხოლოდ ცვლად სიდიდეების მიმართ გამოყენებულში), როგორშიაც მთელს ალგებრაში დგას ზოგადი გამოსახულება მის დაშლასთან, მაგალითად

$$\frac{a}{a-x} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{etc.-ში}$$

$\frac{a}{a-x}$ — გაშლილ წკრივის $1 +$ etc. მიმართ, ან

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h \text{ - ში}$$

$\sin(x+h)$—მის მოპირისპირე დაშლასთან.

დ'ალამბერმა მხოლოდ გაალგებრიზირა $x+dx$ ან $x+\dot{x}$ $x+h$-ში და მაშასადამე $f(x+h)$ $y+dy$, $y+\dot{y}$-დან $f(x+h)$-ში. მაგრამ ლაგრანჟმა მისცა მთელ გამოსახულებას წმინდა ალგებრული ხასიათი, დაუპირისპირა რა მას როგორც ზოგად გ ა უ შ ლ ე ლ გ ა მ ო ს ა ხ უ ლ ე ბ ა ს წკრივი, რომელიც მისგან უნდა იყოს წარმოებული.

b) პირველ 1) მეთოდში, ისევე როგორც 2) რაციონალურში, საძიებელი რეალური კოეფიციენტი მოწოდებულია სრულებით მზა სახით ბინომის შესახებ თეორემით და იმყოფება უკვე როგორც გაშლილ წკრივის მეორე წევრი ე. ი. h^1-ის შემცველ წევრში. მთელი შემდგომი დიფერენციალური პროცესი, სულ ერთია იქნება ის როგორც 1)-ში თუ როგორც 2)-ში, არის ამგვარად ფუფუნება. უკუვაგდოთ ამგვარად უსარგებლო ტვირთი. ჩვენ ვიცით ერთხელ და სამუდამოთ ბინომიალურ დაშლიდან, რომ პირველი რეალური კოეფიციენტი იქნება h-ის მამრავლი, მეორე h^2-ის და ა. შ. ეს რეალური დიფერენციალური კოეფიციენტები არაფერი სხვა არაა გარდა ბინომის მიერ მიმდევრობით განვითარებულ x-ის პ ი რ ვ ე ლ ა დ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი ს ა (და ეს წ ა რ მ ო ე ბ ა დ ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი ს უმარტივესი კატეგორია [?] — ერთი მეტად მნიშვნელოვანთაგანი). რაც შეეხება ცალკეულ დიფერენციალურ ფორმებს, ჩვენ ვიცით, რომ Δx გადაიქცევა dx-ად, Δy — dy-ად, რომ პირველი წარმოებული ღებულობს სიმბოლიურ ფიგურას $\frac{dy}{dx}$, მეორე წარმოებული, $\frac{h^2}{2}$-ის კოეფიციენტი — სიმბოლიურ ფიგურას $\frac{d^2y}{dx^2}$ და ა. შ. ჩვენ შეგვიძლია, მაშასადამე, სიმეტრიისათვის წარმოვადგინოთ ჩვენი შედეგები, მიღებული წმინდა ალგებრული გზით, ერთდროულად ამ მათ სიმბოლიურ დიფერენციალურ ექვივალენტებშიც — ნომენკლატურის საქმე, რომელიც ერთიღა რჩება საკუთრივ დიფერენციალურ აღრიცხვიდან. «მთელი ნამდვილი ამოცანა დაიყვანება მაშინ $x+h$-ის ფუნქციათა ყველა სახეების h-ის მთელ ზრდად ხარისხებად დაშლის (ალგებრულ) მეთოდების მონახვაზე, რაც მრავალ შემთხვევაში არ შეიძლება შესრულებული იყოს ოპერაციათა ძალიან დიდ რაოდენობის გარეშე»[1].

აქამდე ლაგრანჟს არაფერი ისეთი არა აქვს, რაც არ შეიძლება

[1] ციტატა მოყვანილია მარქსის მიერ ინგლისურად. წყარო არ არის დასახელებული.

უშუალოდ მიღებული ყოფილიყო დ'ალამბერის მეთოდისაგან გამოსვლით (რადგან უკანასკნელი მეთოდი აგრეთვე შეიცავს, მხოლოდ შესწორებული სახით, მისტიკოსების დასკვნის მთელ მსვლელობას).

c) მაგრამ როგორც კი y_1 ანუ $f(x+h)=$etc-ს დაშლა იკავებს წინანდელ დიფერენციალურ აღრიცხვის ადგილს (და ამით სინამდვილეში მკვეთრად წამოიწევა მეთოდების საიდუმლოება, რომელნიც გამოდიან $y+dy$ ან $y+\dot{y}, x+dx$ ან, $x+\dot{x}$-დან, სახელდობრ, რომ მათი ნამდვილი განვითარება, რამდენადაც ისინი თავიდანვე წარმოადგენენ გაზრდილ x-ს, როგორც $x+dx$, გაზრდილ y_1-ს როგორც $y+dy$ და ამგვარად გადააქცევენ მონომს ბინომად, ემყარება ბინომის შესახებ თეორემის გამოყენებას), ჩნდება ამოცანა, — რადგან ჩვენ გვაქვს ჩვენს წინაშე $f(x+h)$-ში x-ის ფუნქცია უხარისხოთ, მხოლოდ მისი **ზოგადი გაუშლელი გამოსახულება**, — ალგებრულად გამოვიყვანოთ თითონ ამ გაუშლელ გამოსახულებიდან ზოგადი, მაშასადამე რომელიც გინდა ხარისხების შემცველი x-ის ფუნქციებისათვის გამოსადეგი, წკრივი.

აქ დიფერენციალურ აღრიცხვის ალგებრაიზაციისათვის ლაგრანჟი თავის უშუალო გამოსავალ პუნქტად ღებულობს **ტეილორის** ფორმულას, რომელიც ნამდვილად წარმოადგენს ყელაზე ზოგადს, საყოველთაო თეორემას და ერთდროულად დიფერენციალურ აღრიცხვის ოპერატიულ ფორმულას, სახელდობრ სიმბოლიურ დიფერენციალურ კოეფიციენტებში გამოსახულ გაშლილ წკრივს y_1 ანუ $f(x+h)$-თვის:

$$y_1 \text{ ანუ } f(x+h)=y \text{ (ანუ } f(x))+\frac{dy}{dx}\,h+\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{h^2}{2}+\frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{h^3}{2\cdot 3}+\frac{d^4y}{dx^4}\,\frac{h^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\text{etc.}$$

d) აქ ჩაისვას გამოკვლევა მაკლორენის და ტეილორის თეორემებზე.

e) ლაგრანჟისეული ალგებრული დაშლა $f(x+h)$-ის ექვივალენტურ წკრივად, რომელიც მაგიერობას სწევს ტეილორისეულ $\frac{dy}{dx}$ etc., და შემდეგ სტოვებს მათ როგორც სიმბოლიურ დიფერენციალურ გამოსახულებებს ალგებრულად წარმოებულ x-ის ფუნქციებისათვის (გაიშალოს ეს შემდეგში).

c) **გვ. 25 გაგრძელება**[1].

---

[1] აქ გვ. 69 — 70.

ჩვენ გვაქვს $x_1 - x = \Delta x$ დასაწყისში როგორც $x_1 - x$ სხვაობის გამოსახულება; სხვაობა გამოდის აქ მხოლოდ თავის სხვაობის ფორმაში (ისევე როგორც $y_1 - y$, რაც იწერება ჩვეულებრივ, როცა y დამოკიდებულია x-გან); თუ მივიღებთ $x_1 - x = \Delta x$, ჩვენ ვაძლევთ სხვაობას უკვე ერთნაირ თვით მისგან განსხვავებულ გამოსახულებას. ჩვენ გამოვსახავთ, თუმცაღა განუზღვრელი ფორმით, ამ სხვაობის მნიშვნელობას გარკვეულ თვით სხვაობისაგან განსხვავებულ სიდიდის სახით, მაგალითად, $4 - 2$ არის 4 და 2 შორის სხვაობის წმინდა გამოსახულება; მაგრამ $4 - 2 = 2$ არის სხვაობა გამოსახული 2-ის საშუალებით (მარჯვენა მხარეზე) a) დადებით ფორმით, მაშასადამე უკვე არა როგორც სხვაობა; b) გამოკლება შესრულებულია, სხვაობა გამოთვლილია და $4 - 2 = 2$ მაძლევს მე $4 = 2 + 2$. მეორე 2 გამოდის აქ საწყის 2-ის ნაზრდის დადებით ფორმაში, მაშასადამე ფორმაში, რომელიც პირდაპირ მოპირისპირეა სხვაობის ფორმისა (სრულებით ასევე $a - b = c$; $a = b + c$, სადაც c გამოდის b-ს ნაზრდის სახით; სრულებით ასევე $x_1 - x = \Delta x_1$, $x_1 = x + \Delta x$, სადაც Δx გამოდის უშუალოდ როგორც x-ის ნაზრდი).

უბრალო საწყისი მიღება $x_1 - x = \Delta x =$ რაიმესი სვამს სხვაობის ფორმის ადგილას მეორეს, სახელდობრ ჯამის ფორმას $x_1 = x + \Delta x$. ამასთან ერთად $x_1 - x$, რომელიც მხოლოდ სხვაობას გამოსახავს, ხდება ექვივალენტი ამ სხვაობის მნიშვნელობისა, Δx სიდიდისა.

ამგვარადვე $x_1 - x = \Delta x$-დან მიიღება $x_1 - \Delta x = x$. ჩვენ გვაქვს აქ კვლავ მარცხენა მხარეზე სხვაობის ფორმა, მაგრამ სხვაობისა გაზრდილი x_1-ის და მისი საკუთარი ნაზრდის შორის, რომელიც გამოდის დამოუკიდებლად მის გვერდით. სხვაობა მას შორის და x-ის ნაზრდსა, Δx-ის ტოლისა, არის სხვაობა, რომელიც ახლა, თუმცაღა განუზღვრელად, გამოთქვამს x-ის ერთგვარ გარკვეულ მნიშვნელობას.

მაგრამ თუ გამოდიან მისტიკურ დიფერენციალურ აღრიცხვიდან, სადაც $x_1 - x$ ერთბაშად გამოდის როგორც dx და გადაასწორებენ თავიდან dx Δx-ად, მაშინ გამოსავალ პუნქტად ხდება $x_1 - x = \Delta x$; მაგრამ მაშინ ეს შეიძლება იყოს თავის მხრით უკანვე შემოტრიალებული $x + \Delta x = x_1$-ში, ისე რომ x-ის ზრდა კვლავ მიიღებს x_1-ის განუზღვრელ ფორმას და, როგორც ასეთი, შევა უშუალოდ გამო-

თვლაში — რაც არის ჩვენს მიერ განვითარებულ მეთოდის გამოსავალი პუნქტი.

d) ფორმაში ამ მარტივი განსხვავებიდან ერთბაშად გამომდინარეობს ძირითადი განსხვავება ალრიცხვის განხილვაში (Behandlung), რომელიც ჩვენ მოკლედ შემოვხაზეთ (იხ. თანდართული ცალკე ფურცლები)[1] დ'ალამბერის მეთოდის ანალიზისას. აქ მხოლოდ ზოგადი სახით აღვნიშნავთ:

1) თუ სხვაობა $x_1 - x$ (მაშასადამე აგრეთვე $y_1 - y$-იც) გამოდის ერთბაშად თავის დაპირისპირებულის სახით, ჯამის სახით და, მაშასადამე, მისი სიდიდის მნიშვნელობა ნაზრდის დადებითი ფორმით Δx, მაშინ, თუ შევცვლით ყველგან x-ში (in x) გამოთქმულ პირველად ფუნქციაში x-ს $x+\Delta x$-ით, ჩვენ მივალთ გარკვეული ხარისხების ბინომების დაშლის ამოცანაზე და x_1-ის განვითარება ამოიხსნება ბინომის შესახებ თეორემის გამოყენებაში. ბინომის შესახებ თეორემა არაფერი სხვა არაა, გარდა იმის ზოგადი გამოსახულება, რასაც მივიღებთ, თუ პირველი ხარისხის ბინომი თავის თავზე გავამრავლეთ m-ჯერ. ამიტომ გამრავლება გვემსახურება x_1-ის $(x+\Delta x)$ განვითარების მეთოდად, თუ თავიდანვე წარმოვიდგენთ სხვაობას როგორც მის საპირისპიროს, როგორც ჯამს.

2) რადგან ზოგად გამოსახულებაში $x_1 = x+\Delta x$ სხვაობა დადებით ფორმაში Δx, ე. ი. ნაზრდის ფორმაში, შეადგენს მეორე ანუ უკანასკნელ წევრს, x იქნება პირველი წევრი ხოლო Δx — მეორე x-ში (in x) აღებულ პირველად ფუნქციაში, როცა უკანასკნელი წარმოდგენილია როგორც ფუნქცია $x+\Delta x$-ში (in $x+\Delta x$). მაგრამ ჩვენ ვიცით ბინომის შესახებ თეორემიდან, რომ მეორე წევრი მონაწილეობს მხოლოდ როგორც მამრავლი პირველთან ზრდად ხარისხებში, ისე რომ მამრავლად პირველ გამოსახულებასთან x-ში (in x) (რომელიც ბინომის ხარისხითაა განსაზღვრული) არის $(\Delta x)^0 = 1$, მამრავლად მეორესთან — $(\Delta x)^1$, მესამესთან — $(\Delta x)^2$ და ა. შ. ამგვარად, სხვაობა ნაზრდის დადებითი ფორმით გამოდის მხოლოდ როგორც მამრავლი, და ამასთანავე ნამდვილად როგორც მამრავლი (რადგან $(\Delta x)^0 = 1$) დაწყებული ამ გაშლილი ბინომის $(x+\Delta x)^m$ მეორე წევრიდან.

---

[1] არის ორი ხელთნაწერი ცალკე ფურცლებზე მიძღვნილი დ'ალამბერის მეთოდის ანალიზისადმი. ერთი მათ შორის, დასათაურებული ჩვენს მიერ «შედარება დიფერენცირების მარქსის მეთოდის დ'ალამბერის მეთოდთან» მოყვანილია აქ (იხ. გვ. 17). ჰქონდა თუ არა მარქს მხედველობაში სწორედ ეს ხელთნაწერები—გამორკვეული არაა.

3) მეორე მხრით, თუ განვიხილავთ გაშლას თითონ ფუნქციებისა x-ში (in x), დავინახავთ, რომ ბინომის შესახებ თეორემა გვაძლევს პირველ წევრისათვის, აქ x, რიგ-რიგობით მის წარმოებულ ფუნქციებს. მაგალითად, თუ ჩვენ გვაქვს ალგებრული ბინომი $(x+h)^4$, სადაც h ვთვლით ცნობილად, ხოლო x უცნობად, ჩვენ ვღებულობთ:

$$x^4 + 4x^3h + \text{etc.}$$

$4x^3$, რომელიც დგას მეორე წევრში და მამრავლად აქვს h პირველ ხარისხში, არის ამგვარად x-ის პირველი წარმოებული ფუნქცია, ანუ, თუ ალგებრულად ვილაპარაკებთ: თუ ჩვენ გვაქვს ბ ი ნ ო მ ი ს $(x+h)^4$ გ ა უ შ ლ ე ლ ი გ ა მ ო ს ა ხ უ ლ ე ბ ა, მაშინ გაშლილი წკრივი გვაძლევს x^4-ის პირველი ნამატის (მისი ნაზრდის) სახით $4x^3$, რომელიც გამოდის როგორც h-ის კოეფიციენტი. მაგრამ თუ x არის ცვლადი სიდიდე და ჩვენ გვაქვს $f(x)=x^4$, მაშინ ეს [გამოსახულება] თავის საკუთარ ზრდისას გადაიქცევა $f(x+h)$-დ და საბოლოო ფორმით

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^4 = x^4 + 4x^3\Delta x + \text{etc.}$$

x^4, რომელიც ჩვეულებრივ ალგებრულ ბინომში იყო ჩვენთვის მოცემული როგორც ამ ბინომის პირველი წევრი, გამოდის ახლა x ცვლადის ბინომიალურ გამოსახულებაში, $(x+\Delta x)^4$-ში, როგორც რეპროდუქცია პირველად ფუნქციისა x-ში (in x), მანამ სანამ უკანასკნელი გაიზარდა და გახდა $x+\Delta x$. უკვე ბინომის შესახებ თეორემის თითონ ბუნებიდან პირდაპირ სჩანს, რომ თუ $f(x)=x^4$ გადაიქცევა $f(x+h)=(x+h)^4$, მაშინ პირველი წევრი $(x+h)^4$-ში უნდა იყოს $=x^4$, ე. ი. $=$ პირველად ფუნქციისა x-ში (in x); $(x+h)^4$ უნდა შეიცავდეს პირველად ფუნქციას x-ში (in x) (აქ x^4) $+$ დამატებით ყველა წევრები, რომელიც x^4-მა შეიძინა $(x+h)^4$-დ გარდაქმნისას, მაშასადამე პირველი წევრი ბინომას დაშლაში [არის პირველადი ფუნქცია].

4) შემდეგ: ბინომიალური დაშლის მეორე წევრი, $4x^3h$, გვაწოდებს ჩვენ ერთბაშად ს რ უ ლ ე ბ ი თ მ ზ ა ს ა ხ ი თ პირველს x^4-დან წარმოებულ ფუნქციას, სახელდობრ $4x^3$. ეს წარმოებული მიღებულია ამგვარად $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^4$-ის გაშლის საშუალებით, მიღებულია იმის წყალობით, რომ $x_1 - x$ სხვაობა იყო თავიდანვე წარმოდგენილი როგორც მისი პირისპირობა, როგორც ჯამი.

ამგვარად, მხოლოდ ბინომიალური დაშლა $f(x+\Delta x)$ ან y_1-თვის, მიღებულისათვის $f(x)$-დან x-ის გაზრდით, გვაწვდის ჩვენ პირველ წარმოებულს, კოეფიციენტს h-თან (ბინომიალურ წკრივში), და ამასთანავე ბინომიალური დაშლის თვით დასაწყისში, მის მეორე წევრში. ამგვარად, წარმოებული არავითარ შემთხვევაში მიღებული არაა დიფერენცირების გზით, არამედ უბრალოდ $f(x+h)$ ანუ y_1-ის დაშლის საშუალებით ერთგვარ გარკვეულ გამოსახულებად, რომელიც მიღებულია უბრალო გამრავლებით.

ამ მეთოდის გამოსავალი პუნქტი არის ამგვარად განვითარება განუზღვრელ გამოსახულების y_1 ანუ $f(x+h)$ გარკვეულ ბინომიალურ ფორმაში, მაგრამ არავითარ შემთხვევაში არა $x_1 - x$ და აგრეთვე $y_1 - y$ ანუ $f(x+h) - f(x)$, როგორც სხვაობების, განვითარება.

რადგან ჩვენ ერთბაშად ვღებულობთ

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^4 = x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4,$$

ამიტომ ერთადერთი სხვაობითი განტოლება, რომელსაც ამ მეთოდში ვხვდებით, სახელდობრ

$$[(x+\Delta x)^4 - x^4] = x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4 - x^4,$$

მიღებული როცა ჩვენ ბოლოს უკანვე ვაკლებთ პირველად x^4 ფუნქციას, მოთავსებულს წკრივის თავში, გამოხატავს იმას, რომ ჩვენ გვაქვს ჩვენს წინაშე ნ ა ზ რ დ ი, რომელიც მიიღო პირველად ფუნქციამ x-ში (in x) ბინომიალურ დაშლისას.

ამგვარად ჩვენ გვაქვს ნაზრდი

$$4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4,$$

ნაზრდი პირველად ფუნქციისა x^4. ამიტომ მოპირდაპირე მხარეზე ჩვენ არ გვჭირია ა რ ა ვ ი თ ა რ ი ს ხ ვ ა ო ბ ი თ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ა მ ა თ უ ი მ გ ვ ა რ ი ს ა.

x-ის ნაზრდს ეთანადება y-ის ნაზრდი, სადაც y ანუ $f(x) = x^4$. რის გამოც ნიუტონი ერთბაშადვე სწერს:

$$(dy) \text{ მასთან } \dot{y} = 4x^3\dot{x} + \text{etc.}$$

b) მთელი შემდგომი განვითარება მხოლოდ იმასში მდგომარეობს, რომ სრულებით მზა წარმოებული $4x^3$ გამოვანთავისუფლოთ მისი

მამრავლისაგან Δx და მისი მეზობელ წევრებისაგან, გამოვიყვანოთ ის მის გარემოცვიდან. ამგვარად ეს არის არა განვითარების მეთოდი, არამედ მხოლოდ გამონთავისუფლების მეთოდი (keine Entwicklungs-sondern Loswicklungsmethode).

c) დიფერენცირება $f(x)$-ის (როგორც ზოგად გამოსახულების).

თავში შევნიშნოთ, რომ წარმოებულ ფუნქციების ცნება სიმბოლიურ დიფერენციალურ კოეფიციენტების მიმდევრობით რეალურ ექვივალენტებისათვის იყო სრულებით უცნობი დიფერენციალურ აღრიცხვის პირველ აღმომჩენთათვის და მათი პირველ მიმდევრებისათვის. ნამდვილად ის პირველად იყო შემოყვანილი ლაგრანჟის მიერ. პირველებთან ფიგურირებს მხოლოდ დამოკიდებული ცვლადი, მაგალითად y როგორც x-ის ფუნქცია, სავსებით შეთანხმებულად ფუნქციის ცნების პირვანდელ ალგებრულ აზრთან, რომელიც გამოყენებულია ჯერ ეგრ. წოდ. განუზღვრელ განტოლებათა მიმართ, სადაც მოცემულია მეტი უცნობი ვიდრე განტოლება, და სადაც მაშასადამე y, მაგალითად, ღებულობს სხვადასხვა მნიშვნელობებს x-თვის სხვადასხვა მნიშვნელობის ჩასმისას. მაგრამ ლაგრანჟთან პირველადი ფუნქცია წარმოადგენს x-ის გარკვეულ ალგებრულ გამოსახვას, რომელიც უნდა იყოს გადიფერენცირებული; მაშასადამე თუ y ანუ $f(x)=x^4$, მაშინ x^4 არის პირველადი ფუნქცია, $4x^3$—პირველი წარმოებული და ა. შ. ამიტომ არევდარევის თავიდან ასაცდენად უწოდებთ y-ს, დამოკიდებულ [ცვლადს] ანუ $f(x)$ x-ის (von x) ფუნქციას, პირველად ფუნქციას კი ლაგრანჟის აზრით — პირველად ფუნქციას x-ში (in x) და შესაბამისად წარმოებულებს— ფუნქციებს x-ში (in x).

ალგებრულ მეთოდში, სადაც ჩვენ თავში ვანვითარებთ სასრულო სხვაობას და ვღებულობთ წინასწარ წარმოებულს, და მხოლოდ მისგან საბოლოო წარმოებულს f', ჩვენ ვიცით თავიდანვე: $f(x)=y$, მაშასადამე $\Delta f(x)=\Delta y$ და ამიტომ პირიქითაც $\Delta y=\Delta f(x)$. რის განვითარებაც საჭიროა თავში, ეს სწორედ $\Delta f(x)$-ის, $f(x)$-ის სასრულო ნაზრდის მნიშვნელობისა. ჩვენ ვპოულობთ: $f^1(x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ე. ი. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=$ $=f^1(x)$, მაშასადამე აგრეთვე

$$\Delta y=f^1(x)\,\Delta x \text{ და რადგან } \Delta y=\Delta f(x), \text{ ამიტომ}$$

$$\Delta f(x)=f^1(x)\,\Delta x.$$

დიფერენციალური გამოსახულების შემდგომი განვითარება, რომელიც შედეგში გვაძლევს:

$$df(x) = f^{1}(x)\,dx,$$

არის უბრალოდ მანამდე განვითარებულ სასრულო ნაზრდის დიფერენციალური გამოსახულება.

ჩვეულებრივ მეთოდში dy ანუ $df(x)=f'(x)\,dx$ საერთოდ არ ვითარდება, მაგრამ (იხ. ზემოთ) $(x+\Delta x)$ ანუ $(x+dx)$ ბინომით სრულიად მზა სახით მოწოდებული $f'(x)$ მხოლოდ გამონთავისუფლება მის მამრავლისაგან და მეზობელ წევრებისაგან.

ლ. გ ო კ ი ე ლ ი

კარლ მარქსის მათემატიკური ხელნაწერები და მათემატიკის დაფუძნების პრობლემები

წინასწარი შენიშვნები

კარლ მარქსის სამეცნიერო მემკვიდრეობის მნიშვნელოვან ნაწილს წარმოადგენს მათემატიკის, განსაკუთრებით მისი დაფუძნების, საკითხებისადმი მიძღვნილი ნაწერები. მარქსს სჭირდებოდა მათემატიკა თავის კვლევა-ძიებისათვის პოლიტიკურ ეკონომიაში. მათემატიკის მნიშვნელობა მარქსისათვის ამ მხრივ არ ამოიწურება მარტივი მათემატიკური აპარატურის საჭიროებით, სხვადასხვა ალგებრული სახის ჩანაწერების და გამოთვლების მოსახდენად. მათემატიკის, როგორც თეორიულ დისციპლინის, შესწავლა ხელს უწყობდა მარქსს მისი ეკონომიური კონცეპციების დამუშავების საქმეშიაც. ენგელსისათვის მიწერილ 1868 წლის 8 იანვრით დათარიღებულ წერილში[1] მარქსი მიუთითებს მთელ რიგ თავის დებულებებზე, რომელნიც დიურინგისათვის გაუგებარი დარჩა, და მათ შორის იმაზე, რომ მის მიერ «პირველად ხელფასი ახსნილია როგორც ირაციონალური ფორმა მის ქვეშ დამალულ დამოკიდებულების გამომჟღავნებისა, და ეს ერთნაირად შეეხება ხელფასის ორივე ფორმას: დროით და სანაღდოს (მე ძალიან დამეხმარა, რომ უმაღლეს მათემატიკაში ხშირად ხვდება ასეთი ფორმულები)».

მაგრამ მარქსს მათემატიკა აინტერესებდა არა მარტო იმ ხაზით, რომლითაც ის პოლიტიკურ ეკონომიას უკავშირდება. მას აინტერესებდა მათემატიკა თავის თავადაც, განსაკუთრებით მისი ლოგიკური დაფუძნების საკითხები. მარქსი დიდ ყურადღებას აქცევს მათე-

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. XXIV, стр. 6—7.

მატიკასთან დაკავშირებულ ფილოსოფიურ საკითხებს, მათემატიკის დიალექტიკური ხასიათის გამორკვევას.

მარქსის მათემატიკური ნაწერები შეიცავს სხვადასხვა ხასიათის მასალას. მასალის გარკვეულ ნაწილს შავი ჩანაწერის სახე აქვს და მისი საბოლოო ლიტერატურული დამუშავება მოხდენილი არაა. შედარებით ამ მხრივ უკეთ დამუშავებულია მასალის ერთი ნაწილი, რომელიც დიფერენციალურ აღრიცხვის დაფუძნების საკითხებს ეხება და რომელიც მარქსმა ა ამზადა ენგელსისათვის.

მარქსის მათემატიკური ხელნაწერების ტექსტი, ძირითადად, გერმანულია, მაგრამ, აზრის სათანადო კოლორიტით გამოთქმის მიზნით, მარქსს ზოგჯერ უხდება სხვა ენის სიტყვების გამოყენებაც, და მის ხელნაწერებში იმგვარ სიტყვებსაც ვხვდებით, რომელნიც ერთგვარ თავისუფალ კომპოზიციას წარმოადგენს სხვადასხვა ენის სიტყვებიდან. ეს გარემოება ადიდებს იმ სიძნელეებს, რომელნიც მარქსის მათემატიკურ ხელნაწერების თარგმნის და მისი სხვა ენაზე, მთელი თავისი აზრობრივი სიმდიდრით და ნიუანსირებით, გადატანის ამოცანის წინაშე დგას.

მარქსის სიკვდილის შემდეგ ენგელსი აპირებდა მის მათემატიკურ ნაშრომების გამოცემას. «შეიძლება, — სწერს ის «ანტი-დიურინგის» მეორე გამოცემის წინასიტყვაობაში[1], — მე მომავალში შემთხვევა მქონდეს შევკრიბო და გამოვცე ჩემი შრომების შედეგები (ბუნების დიალექტიკის შესახებ — ლ. გ.) მეტად მნიშვნელოვან მანუსკრიპტებთან ერთად, რომელნიც დარჩა მარქსის შემდეგ». ეს განზრახვა განუხორციელებელი დარჩა.

მარქსის მათემატიკური ხელნაწერები პირველად გამოქვეყნდა საბჭოთა სინამდვილის პირობებში. 1933 წ. ჟურნალის «Под знаменем марксизма» იანვარ-თებერვლის ნომერში დაიბეჭდა მარქსის მათემატიკური ხელნაწერების ნაწილის, რომელშიაც უმთავრესად მოხვედრილია ენგელსისათვის გადათეთრებული ჩანაწერები, რუსული თარგმანი. ამჟამად სწარმოებს მუშაობა მარქსის მათემატიკურ ხელნაწერების მთლიანად გამოსაქვეყნებლად, როგორც ორიგინალის ენაზე, ისე რუსულ თარგმანში.

მარქსის მათემატიკური ხელნაწერების გამოქვეყნებით გამოვლინდა მარქსიზმ-ლენინიზმის კლასიკოსების ოქროს ფონდის ერთ-ერთი

---

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. XIV, 1931, стр. 10.

ნაწარმოები, რომელსაც ძირითადი მნიშვნელობა აქვს მათემატიკის საფუძვლების შესახებ სწორი თვალსაზრისის დადგენისათვის.

ჯერ-ჯერობით კვლევა-ძიებას მარქსის მათემატიკური კონცეპციის გარშემო არ აქვს მიცემული ამ საქმისათვის საჭირო გაქანება. წინამდებარე გამოკვლევის ამოცანას არ წარმოადგენს მარქსის მათემატიკური ხელნაწერების ყოველმხრივი გაშუქება. ეს ხელნაწერები არ ეკუთვნის იმგვარ ნაშრომთა რიცხვს, რომელთა მნიშვნელობის გარკვევისათვის საკმარისია ერთი ან თუნდაც რამდენიმე გამოკვლევა. მარქსის მათემატიკური ხელნაწერები მუდმივად უნდა იყოს მათემატიკოსების მხედველობის არეში, ისინი ერთნაირი ორიენტაციის მიმცემი უნდა იყვნენ და გამოყენებული არა მარტო იმ საკითხების გარკვევის დროს, რომლისადმი ისინი უშუალოდ მიძღვნილი არიან, არამედ პირდაპირი თუ არაპირდაპირი სახით მთელი თანამედროვე მათემატიკური მეცნიერების მიმართ.

ჩვენს შრომაში განვიხილავთ საკითხს იმის შესახებ, თუ როგორი გაშუქება შეიძლება მიეცეს მათემატიკის და, კერძოდ, მათემატიკური ანალიზის დაფუძნების ზოგიერთ პრობლემას მარქსის მიერ შემუშავებულ თვალსაზრისის საფუძველზე.

I

უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დაფუძნების თანამედროვე მდგომარეობა

1. დაფუძნების საჭიროების საკითხი

კარგად ცნობილია, რომ უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვა, დიდი ხნის განმავლობაში მისი შექმნის შემდეგ, ლოგიკური დაფუძნების მხრივ სრულებით არადამაკმაყოფილებელ მდგომარეობაში იმყოფებოდა. ახალი მეთოდები იმდენად მძლავრი და ფართო გამოყენების შესაძლებლობის მქონე აღმოჩნდა, რომ მათემატიკოსები მუშაობდნენ განსაკუთრებული სწრაფი ტემპით და ჩქარობდნენ ამათუიმ საკითხზე წარმოებულ კვლევა-ძიების დამთავრებას, რადგან მათ მრავალი სხვა საკითხი უცდიდა. ასეთ პირობებში სათანადო ყურადღება არ ექცეოდა ლოგიკურ სიმკაცრის დაცვას და საფუძვლების გარკვევას. ამისათვის პირველ ხანებში არა მარტო საკმაო დრო არ იყო, არამედ დაფუძნების საჭიროების სრული გაგებაც.

მეცნიერების განვითარებისათვის დამახასიათებელია, რომ საკითხები, რომელიც უფრო ელემენტარულ დარგს და ღრმა ფენას შეეხება, უფრო გვიან ხდებიან ყოველმხრივი გამოკვლევის საგნად. დამახასიათებელია, მაგალითად, რომ იმ დროს, როცა მათემატიკის უფრო მაღალი ფენების დამუშავებამ წარსულში უდიდეს წარმატებებს მიაღწია, არითმეტიკის ნამდვილი მეცნიერული თეორიის შექმნა დაიწყო მხოლოდ რამდენიმე ათეული წლის წინ და მუშაობა ამ მხრივ განსაკუთრებულის ინტენსივობით სწორედ ამჟამად სწარმოებს, ჩვენს თვალწინ.

ჯერ კიდევ არისტოტელმა შენიშნა, რომ არა ყველაფერი, რაც წინაა თავის ლოგიკური ფორმულირებით, იქნება წინ თავის არსითაც [1]. მარქსი «კაპიტალის» პირველ ტომში სწერს [2]: «აზროვნება ადამიანის ცხოვრების ფორმების შესახებ და, ამნაირად, მისი მეცნიერული ანალიზიც საერთოდ წინააღმდეგი მიმართულებით მიდის, ვიდრე ამ ცხოვრების ნამდვილი განვითარება. იგი post festum [შემდეგ] იწყება და ამიტომ განვითარების პროცესის დამთავრებული შედეგიდან გამომდინარეობს». მსგავს აზრს მარქსი გამოთქვამს შრომაში «პოლიტიკური ეკონომიის კრიტიკისათვის» [3]. «მაგრამ ფიზიოკრატებისათვის მაინც, როგორც მათი მოწინააღმდეგებისათვის, მწვავე საკამათო საკითხი ის კი არ იყო, თუ რომელი შრომა ჰქმნის ღ ი რ ე ბ უ ლ ე ბ ა ს, არამედ — რომელი შრომა ზ ე დ მ ე ტ ღ ი რ ე ბ უ ლ ე ბ ა ს ქმნის. მაშასადამე, ისინი განიხილავდენ პრობლემას უფრო რთულ ფორმაში მანამდე, ვიდრე მათ ჯერ კიდევ არ აეხსნათ იგი მის ელემენტარულ ფორმაში; ყველა მეცნიერებათა ისტორიული განვითარება მრავალ ჯვარედინი და მოსარები გზით არის ნამდვილ გამოსავალ წერტილთან მიმავალი. განსხვავებით სხვა ხუროთმოძღვართაგან, მეცნიერება არა თუ აშენებს საჰაერო კოშკებს, არამედ შენობაშიც ცალკე საბინადრო სართულებსაც აგებს იმაზე უწინ, ვიდრე მისი საძირკველი აქვს ჩაყრილი».

თავის მათემატიკურ ნაწერებში მარქსი ბევრჯერ მიუთითებს საფუძვლების დაუმუშავებლობის ნაკლზე მათემატიკოსების მხრით. ის აღნიშნავს, მაგალითად, რომ მათ მიერ არ იყო შენიშნული გადასვლის აუცილებლობა დიფერენციალურ სიმბოლიკის მეთოდზე, პირველ ალ-

[1] Аристотель. Метафизика, кн. 13, гл. II, пер. Кубицкого 1934, стр. 221, 220. იხ. აგრეთვე Аристотель. Физика, I, 1, пер. Карпова, 1936, стр. 5.

[2] კ. მარქსი. კაპიტალი, ტ. I, 1930, გვ. 42.

[3] კ. მარქსი. პოლიტიკური ეკონომიის კრიტიკისათვის, 1932, გვ. 82.

გებრულ მეთოდიდან (ისტორიულად მეორიდან). ამისათვის, დასძენს მარქსი, ისინი ნამეტანი გარიცული იყვნენ აღრიცხვის მასალით (გვ. 36[1]). აქ საინტერესოა აგრეთვე სიტყვების: «პირველ ალგებრულ მეთოდიდან» შემდეგ მითითება ბრჩხილებში: ისტორიულად მეორიდან. საჭიროა მათემატიკური აზროვნების გარკვეული განვითარება და მომწიფება, რომ დანახული იყოს საჭიროება სავსებით ზუსტი ლოგიკური დაფუძნებისა და ამ საქმის განხორციელებას მიმართონ.

ეს, რასაკვირველია, სრულებით არ ამართლებს იმ თვალსაზრისს, რომელსაც მათემატიკურ თეორიის აგებისას აუცილებლად არ მიაჩნია მოითხოვოს მკაცრი ლოგიკური დასაბუთება. ხომ სწორედ დაფუძნების საჭიროების გაგებაზეა ლაპარაკი. ამგვარი საჭიროების გაგება დაკავშირებულია სწორედ უფრო მომწიფებულ მეცნიერულ აზროვნებასთან. მეცნიერების განვითარების უფრო ადრინდელი საფეხურების არსებობა არამცთუ ამტკიცებს ამგვარ დაფუძნების ზედმეტობას, არამედ ამ საფეხურებით წარმოდგენილი განვითარება მეცნიერებისა სწორედ ამზადებს მკაცრი დაფუძნების საჭიროების შეგნებას. მაშინაც, როცა ზუსტი გზით მხოლოდ კვლავ დამტკიცებულია ის შედეგები, რაც წინად არა ზუსტი გზით იყო მიღებული, ეს სრულებით არ ნიშნავს ამ ზუსტი გზის ზედმეტობას. სწორედ ეს ზუსტი მსჯელობა საბოლოოდ ადასტურებს, რომ წინად არაზუსტი გზით მიღებული შედეგი სწორია, და არ შეიძლება თვით ამ გარემოებაზე დაყრდნობით გავაუქმოთ ის, რამაც სწორედ ეს გარემოება უზრუნველყო. თუ გარკვეული ზუსტი მსჯელობა, იმის შემდეგ რაც ის ერთხელ გამოყენებულია, მეორეჯერ უკვე არაფერს ახალს არ გვეტყვის, ეს იმას არ ნიშნავს, რომ ის პირველადაც ზედმეტია.

ისტორია არის მსვლელობა წინ და არა უკან, და არაა საჭირო ბრმად გავიმეოროთ უკვე განვლილი საფეხურები და უკვე გადალახული შეცდომები.

არ შეიძლება რაიმე დააკანონო მარტო იმის გამო, რომ მას ისტორიულად ადგილი ჰქონდა. ასეთი მიდგომა არამცთუ ისტორიული იქნება, არამედ ისტორიისა და ისტორიულ განვითარების

---

[1] წინამდებარე წიგნის სხვადასხვა ადგილზე მითითებისას, კერძოთ მასში მოთავსებულ მარქსის მათემატიკურ ხელნაწერებისა, საზოგადოთ, სიმოკლისათვის, აღნიშნულია, მხოლოდ გვერდები და მხოლოდ ზოგიერთ შემთხვევაში, მარქსის ტექსტის ციტირების დროს, გვერდის დასახელების წინ მოთავსებულია სიტყვა: მარქსი.

უგულებელყოფას წარმოადგენს. ამ შემთხვევაში ჩვენ გვექნებოდა, კ. მარქსის სიტყვებით რომ ვთქვათ, ნამდვილ ისტორიულ შეხედულების ნაცვლად მოჩვენებითი, «რომელიც კლავს ისტორიის გონებას, იმისათვის, რომ შემდეგ მიუზღვას მის ძვლებს ისტორიული პატივი»[1]. გადასვლა არასწორ აზრიდან სწორ აზრზე ყველაზე ნაკლებად აკანონებს პირველს. დღევანდელ დღისათვის არ შეიძლება იყოს კანონად გუშინდელი დღის შეცდომა. შეცდომა არ შეიძლება დაკანონდეს მარტო იმის გამო, რომ ის მოხდა და გადავიდა წარსულში. აქ შეიძლება გავიხსენოთ მარქსის ნათქვამი სამართლის ისტორიულ სკოლის შესახებ: «სკოლა, რომელიც აკანონებდა დღევანდელ დღის სისაძაგლეს გუშინდელ დღის სისაძაგლით». «ისტორიულ სკოლამ გახადა წყაროების შესწავლა თავის ლოზუნგად, თავის სიყვარული წყაროებისადმი მან უკიდურესობამდე მიიყვანა, იგი ითხოვს მენიჩბესაგან, რომ ის ცურავდეს არა მდინარეზე, არამედ მის წყაროზე»[2]. ჩვენ შემდეგ ბევრჯერ გვექნება შემთხვევა დავინახოთ, თუ რა დიდ მნიშვნელობას ანიჭებს მარქსი ლოგიკურ სიზუსტეს მათემატიკაში, თუ რამდენად უარყოფითად განწყობილია ის იმ თვალსაზრისის მიმართ, რომელიც მათემატიკის შედეგებს და მათემატიკურ მსჯელობას განიხილავს როგორც ლოგიკურად მხოლოდ «მიახლოვებითს».

უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის ლოგიკური ნაკლები არ იყო სრულებით შეუმჩნეველი ძველ მათემატიკოსებისთვისაც, მაგრამ ამ ნაკლებს ისინი ერთნაირად უგულებელყოფდენ. შემდეგშიაც დიდი ხნის განმავლობაში დაფუძნების საკითხები შედარებით დაუმუშავებელ მდგომარეობაში რჩებოდა, მაგრამ, რასაკვირველია, ეს ისე არ უნდა იყოს გაგებული, რომ ამ მხრივ სრულებით არაფერი კეთდებოდა. მაგრამ მხოლოდ მე-XIX საუკუნეში, განსაკუთრებით მის მეორე ნახევარში, დაიწყო სისტემატიური მუშაობა დაფუძნების საკითხებზე, ღრმა კრიტიკული გადამუშავება საფუძვლებისა. განსაკუთრებული მნიშვნელობა მოიპოვა სიმრავლის ცნებამ, შეიქმნა ახალი დარგი — სიმრავლეთა თეორია და სხ. მთელი რიგი სიძნელეების, რომელნიც მჟღავნდებოდა ძველ მათემატიკაში, გადალახული იყო. სამაგიეროთ თვით სიმრავლეთა თეორიაში გაჩნდა ახალი სიძნელეები, რომლების გადაწყვეტაზე დღესაც დაძაბული მუშაობა სწარმოებს.

---

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. I, 1928, стр. 186.
[2] Ibid., 40 1,209.

ჩვენ ჯერ მოკლედ განვიხილავთ უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დაფუძნების თანამედროვე მდგომარეობას, ამ მხრივ უკვე მტკიცედ დადგენილ შედეგებს. ეს გაგვიადვილებს დანახვას იმ ნაკლებისა, რომლებიც ძველ თეორიებს ახასიათებს და იმ ისტორიულ გზების მიმართულებისა, რომლებმაც შესაძლებელი გახადეს ამ ნაკლების თავიდან აცილება. ამის შემდეგ იმ ძველი თეორიების ფონზე, რომელთანაც საქმე ჰქონდა მარქსს, უკეთ გამოჩნდება თავისებურება და მნიშვნელობა თვალსაზრისისა, რომელზედაც მარქსი მივიდა საქმის ყოველმხრივ შესწავლის, ხანგრძლივ მუშაობის და ფიქრის შედეგად.

2. ნამდვილი რიცხვი

დავიწყოთ ირაციონალური რიცხვის განსაზღვრის საკითხით. ადვილი საჩვენებელია, რომ რაციონალურ რიცხვთა ფარგლებში არ არსებობს, მაგალითად, ისეთი, რომელიც კვადრატის დიაგონალის სიგრძეს გამოთქვამდეს, თუ გაზომვის ერთეულად კვადრატის გვერდს მივიღებთ. ეს იმასთან დაკავშირებულია, რომ ისეთი რაციონალური რიცხვი არ არსებობს, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლი იყოს.

ეხლა, როგორ შემოვიყვანოთ ისეთი არითმეტიკული ობიექტები, რომლების საშუალებით შესაძლებელი იქნებოდა იმგვარი მონაკვეთების, როგორიცაა მაგალითად ზემოთდასახელებული, ზომის გამოთქმა? ისეთ პირობებში, როცა იმგვარი რაციონალური რიცხვი არ არსებობს, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია, როგორ შემოვიყვანოთ გარკვეული ასეთი თვისების რიცხვი, რომელსაც აღვნიშნავდით $\sqrt{2}$? ხშირად ამ შემთხვევაში ასეთნაირად იქცევიან. ამბობენ — აღვნიშნოთ $\sqrt{2}$-ით ისეთი, რაციონალურ რიცხვებისაგან განსხვავებული, ახალი ბუნების რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლი არის. მაგრამ ამ გზით არ არის შემოყვანილი გარკვეული ობიექტი, რომლის აღნიშვნას აპირობენ $\sqrt{2}$-ით. აღნიშვნა ხომ საგნის განსაზღვრის ადგილს ვერ დაიკავებს. გამოდის, რომ ისეთი რიცხვის არარსებობა ჯერ-ჯერობით ჩვენს განკარგულებაში მყოფ რიცხვთა შორის, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია, თითონ წარმოადგენს განსაკუთრებულ საბუთს იმისათვის, რომ ასეთი თვისების მქონე რიცხვი გამოჩნდეს, რაკი სათანადო აღნიშვნა ჩვენ უკვე მზად გვაქვს.

თუ იტყვიან, რომ ასეთი რიცხვი არ არსებობდა ძველ რიცხვთა შორის, ხოლო მას ჩვენ ახალ რიცხვთა შორის ვეძებთ, ამაზე უპა-

სუხებთ, რომ ჯერ-ჯერობით ჩვენ მხოლოდ ძველ რიცხვებთან გვაქვს საქმე, ხოლო ახალი რიცხვები ჯერ კიდევ შემოსაყვანია. მათ სიახლეზე შეგვიძლია ლაპარაკი, როცა ისინი უკვე შემოყვანილია, და თითონ ეს სიახლე ვერ წაუსწრებს მათ, როგორც მათივე შემოყვანაში მონაწილე გარკვეული მომენტი. სურვილი ახალი ბუნების რიცხვების შემოყვანისა ვერ იქნება საფუძველი თვით ამ სურვილის რეალიზაციისა.

შეიძლება ახლა, მაგალითად, $\sqrt{2}$ განსაზღვრონ, როგორც გარკვეულ მონაკვეთის ზომა, სახელდობრ კვადრატის დიაგონალისა, თუ მისი გვერდი მიღებულია ერთეულის ტოლად. მაგრამ ჩვენ უნდა გვქონდეს სათანადო არითმეტიკული ობიექტები, რომ ვთქვათ, რომ ისინი გამოსახავენ ზომას ამათუიმ მონაკვეთისა. ზომის ცნება ვერ იქნება ლოგიკური საფუძველი ამათუიმ სახის რიცხვთა არითმეტიკულ თეორიისათვის. მართალია, ზომის თეორიის შექმნის საჭიროება იძლევა იმპულსს რიცხვის ცნების განზოგადოებისა, მაგრამ აქ მხოლოდ გარკვეული ამოცანა დასმულია და თითონ ის თავისივე პასუხს არ წარმოადგენს. თვით გაზომვის თეორიის შექმნის ინტერესი მოითხოვს იმას, რომ აგებული იყოს არითმეტიკული თეორია სათანადო ხასიათის რიცხვებისა.

ეხლა შესაძლებელია ასეთნაირად შეეცადონ $\sqrt{2}$-ის შემოყვანას. შეიძლება მოინახოს ისეთი ორი მეზობელი მთელი რიცხვი, ამ შემთხვევაში 1 და 2, რომ პირველის კვადრატი ნაკლებია 2-ზე, ხოლო მეორის მეტია. შეიძლება ვთქვათ, რომ ისინი არიან $\sqrt{2}$-ის მიახლოვებითი მნიშვნელობანი სიზუსტით 1 — პირველი ნაკლებობით, მეორე ჭარბობით. ამის შემდეგ შეგვიძლია ავიღოთ მიახლოვებითი მნიშვნელობანი სიზუსტით, მაგალითად, $\frac{1}{10}$ (1,4 და 1,5), $\frac{1}{100}$ (1,41 და 1,42) და ა. შ.. შეიძლება ვთქვათ, რომ ამ გზით თანდათან უახლოვდებით ისეთ მდგომარეობას, რომ რიცხვის კვადრატი 2-ის ტოლი იყოს. ჩვენი პროცესი შეგვიძლია უსასრულოდ განვაგრძოთ. მაშინ მივიღებთ ორ უსასრულო მიმდევრობას რაციონალურ რიცხვებისა: 1; 1,4; 1,41;... და 2; 1,5; 1,42,..., რომელთა n-ური წევრები ერთიმეორისაგან $\frac{1}{10^{n-1}}$-ით განსხვავდებიან და რომელთა შორის ერთის კვადატი 2-ზე ნაკლებია, ხოლო მეორის 2-ზე მეტი. ეხლა $\sqrt{2}$ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც ის, რითაც ეს უსასრულო პროცესი მთავრდება, როგორც ის, რასაც ჩვე-

ნი პროცესის საშუალებით უსასრულოდ უახლოვდებით, როგორც უსასრულო მიმდევრობათა: 1; 1,4; 1,41;... და 2; 1,5; 1,42;... ზღვარი.

ამგვარი მიდგომის შესახებ შეიძლება შემდეგი ითქვას: ამ შემთხვევაში ჩვენ ლოგიკურად მოცემული კი არ გვექნება $\sqrt{2}$, არამედ შეგვიძლია მას ბევრად თუ ნაკლებად «მიუახლოვდეთ». მაგრამ თვით ასეთ «მიახლოვებაზეც» ლაპარაკი შეუძლებელი იქნება. იმისათვის, რომ მიახლოვებაზე ვილაპარაკოთ, ის, რასაც უახლოვდებით, ლოგიკურად რაღაცნაირად მოცემული უნდა გვქონდეს. წინააღმდეგ შემთხვევაში არც ექნება აზრი ლაპარაკს მ ი ს ა დ მ ი ამათუიმ მიახლოვების შესახებ. არ შეიძლება ესათუის ცნება პირველად თვით «მიახლოვების» საშუალებით იყოს შემოყვანილი და შემდეგ კონსტატირებული იყოს თითონ მიახლოვება მ ი ს დ ა მ ი.

მაგრამ კიდევაც რომ შეიძლებოდეს ჩვენს შემთხვევაში მიახლოვებაზე ლაპარაკი, ეს იქნება მიახლოვება მხოლოდ არითმეტიკული მნიშვნელობით. ნამდვილად არითმეტიკული მიახლოვების საშუალებით არ შეიძლება შემოყვანილ იყოს სათანადო არითმეტიკული ობიექტი. არითმეტიკული მიახლოვება არ ნიშნავს კიდევ ლოგიკურ «მიახლოვებას», არითმეტიკულად მცირე არ ნიშნავს ლოგიკურადაც «მცირესაც». სიმცირე შეეხება სათანადო ობიექტის არითმეტიკულ ხასიათს და არა ა მ ობიექტის ლოგიკურ აზრს და მნიშვნელობას. არ შეიძლება შეცდომის ლოგიკური მნიშვნელობის უგულებელყოფა იმის საფუძველზე, რომ დაშვებული შეცდომა არითმეტიკულად მცირეა. ასეთი ცდა მოგვაგონებდა ერთი მორწმუნის ცდას მის მიერ მარხვის გატეხით ჩადენილ ცოდვის მნიშვნელობის შემცირებულად წარმოდგენისა იმ საბუთით, რომ მან ცოტა ხორცი ჭამა.

როცა უნდათ, მაგ., $\sqrt{2}$ პირველად შემოიყვანონ როგორც სათანადო მიმდევრობის ზღვარი, მაშინ გამოდის, რომ $\sqrt{2}$ წარმოგვიდგება როგორც ისეთი რამ, რასაც მივიღებთ უსასრულო პროცესის დასრულების შ ე მ დ ე გ. აქ საქმე ისეთნაირად აქვთ წარმოდგენილი, რომ უხდებათ სათანადო მიმდევრობის კვალდაკვალ ლოგიკურად გავლა, და ამის შემდეგ უკვე მიადგებიან $\sqrt{2}$. მაგრამ უსასრულო პროცესი სწორედ თავის დაუსრულებლობით ხასიათდება, და არ შეიძლება ლაპარაკი იმის შესახებ რასაც მივიღებთ ამ პროცესის გავლის შემდეგ. ეს მარტო მიტომ კი არა, რომ ჩვენ სუბიექტურად არ გვეცოდინება თუ რას მივიღებთ, არამედ საქმე სწორედ იმასშია,

რომ ობიექტურად არა აქვს აზრი ლაპარაკს იმის შესახებ, თუ რას მივიღებთ უსასრულობის შემდეგ. საჭიროა უსასრულო პროცესი ნაადრევად დასრულებულად წარმოვიდგინოთ ე. ი. მას ფაქტიურად სასრულო ხასიათი მივცეთ, რომ წარმოვიდგინოთ ის საფეხური, რომელიც ამ პროცესის შემდეგ გვექნება. უსასრულობა დაკავშირებულია თვით სათანადო სიმრავლესთან, სათანადო მიმდევრობასთან და არა მისგან განცალკევებულად წარმოგვიდგება, როგორც დამატებითი საფეხური *უსასრულო* მიმდევრობის *შემდეგ*. ამ მხრივ საინტერესოა დისკუსია იოჰან ბერნულის და ლეიბნიცის შორის [1]. ლეიბნიცი სწერს: «თუ ჩვენ მივიღებთ, რომ ხაზზე ნამდვილად მოცემულია მონაკვეთები, რომელნიც უნდა იყვნენ აღნიშნული $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,..., და რომ ამ მწკრივის *ყველა* წევრი ნამდვილად არსებობს, თქვენ ამისაგან დაასკვნით, რომ არსებობს აგრეთვე უსასრულოდ მცირე წევრი; ჩემი აზრით კი აქედან მხოლოდ ის გამომდინარეობს, რომ ნამდვილად არსებობენ ნებსითი *სასრულო* წილადები ნებსითი სიმცირისა». ამაზე ბერნული უპასუხებს: «თუ გვაქვს *ათი* წევრი, აუცილებლად არსებობს *მეათე*, თუ გვაქვს *ასი*, აუცილებლად არის *მეასე*, მაშასადამე, თუ გვაქვს *უსასრულოდ დიდი* რაოდენობა წევრებისა, არსებობს *ინფინიტეზიმალური* წევრი». აქ ბერნული იმ გარემოებას, რომელიც სასრულო სიმრავლეს შეეხება და სწორედ სიმრავლის სასრულო ხასიათთან დაკავშირებულია, ავრცელებს უსასრულო სიმრავლეზე. მიმდევრობას $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ..., სწორედ არა აქვს უკანასკნელი წევრი, გარკვეული უსასრულოდ მცირე რიცხვის სახით. ეს სრულებით არ ლაპარაკობს თვით უსასრულობის ცნების წინააღმდეგ. უსასრულობა უნდა ვეძებოთ იქ, სადაც ის არის, დაკავშირებით ჩვენს შემთხვევაში თვით უსასრულო სიმრავლესთან $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ..., და არა ამ სიმრავლის შემდეგ, როგორც საფეხური, რომელსაც მივაღწევთ ამ სიმრავლის გავლის შემდეგ.

ნათქვამის შემდეგ ცხადია, რომ $\sqrt{2}$ არ შეიძლება პირველად შემოყვანილი იყოს როგორც სათანადო მიმდევრობის ზღვარი, რო-

[1] იხ., მაგ. H. Weil. Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, 1927, S. 36.

გორც ის, რასაც მივიღებთ სათანადო უ ს ა ს რ უ ლ ო სიმრავლის გავლის შ ე მ დ ე გ. ამგვარი მიდგომის მიხედვით ზღვარი მსგავსი იქნება, თუ ვიხმართ ერთ-ერთს ასეთ შემთხვევაში ხშირად ციტირებულ შედარებათაგანს, დანაიდების უფსკერო კასრის ფსკერისა.

ეხლა ნაცვლად იმისა, რომ ვეძებოთ გარკვეული საფეხური უსასრულო სიმრავლის შემდეგ, შეიძლება საქმე გვქონდეს თვით ამ სიმრავლესთან, როგორც გარკვეულ მთლიან ობიექტთან, ავიღოთ თვით სათანადო საგნების ერთობლიობა. საგანთა სიმრავლე თითონ კი არ წარმოადგენს ახალ საფეხურს თვით ამ საგნების ერთობლიობის მიმართ, არამედ სწორედ ამ საგანთა ერთობლიობაზეა ლაპარაკი. სიმრავლის მისაღებად არ არის საჭირო უცადოთ მის დამატებით შედგენას მისი ელემენტთა ერთობლიობისაგან. საქმე თავდება იმის შემდეგ, რაც ჩვენ ეს ერთობლიობა უკვე გვაქვს. ამგვარად, სრულებით ბუნებრივია $\sqrt{2}$ განვსაზღვროთ, როგორც არა ისეთი რამ, რაც ჩვენ არ გვაქვს, მაგრამ რასაც შეგვიძლია ბევრად თუ ნაკლებად მივუახლოვდეთ სათანადო სიმრავლის საშუალებით, არამედ როგორც თითონ ის ჩვენი სიმრავლე, რომელიც გარკვეულად გ ვ ა ქ ვ ს. რასაკვირველია, იმისათვის, რომ გარკვეული უსასრულო სიმრავლე გვქონდეს, არ არის საჭირო ცალკე ჩამოთვლილი და რეგისტრირებული იყოს ყოველი მისი ელემენტი. უსასრულო სიმრავლე ჩვენ შეიძლება გვქონდეს, როგორც სწორედ უსასრულო სიმრავლე, და არა სასრულო სიმრავლის სახით. შესაძლებლობა სიმრავლის ყველა ელემენტების ჩამოთვლისა ძალაშია მხოლოდ სასრულო სიმრავლისათვის. თვით სასრულო სიმრავლის შემთხვევაში ყველა ელემენტის რეგისტრაციის შესაძლებლობა თითონ სიმრავლის ზოგად ცნებასთან კი არ არის დაკავშირებული, არამედ ამგვარი სიმრავლის გარკვეული თავისებურების გამომხატველია. სიმრავლის ცნებით ჩვენ უკვე უნდა ვისარგებლოთ იმისათვის, რომ ამათუიმ სიმრავლისათვის დავსვათ საკითხი მ ი ს ი ყველა ელემენტის რეგისტრაციის შესაძლებლობის შესახებ.

იმისათვის, რომ სიმრავლე გვქონდეს, საკმარისია დასახელებული იყოს სათანადო ზოგადი ნიშანი. შეუძლებლობა უსასრულო სიმრავლის ყველა ელემენტების რეგისტრაციისა დაკავშირებულია ამგვარ სიმრავლის ხასიათთან და სრულებით არ წარმოადგენს ნიშანს უსასრულო სიმრავლის არარსებობის ან ამ ცნების ლოგიკური არასრულფასიანობისა. უსასრულო სიმრავლე უნდა გვქონდეს, რომ მის სათანადო თავისებურებებზე ვილაპარაკოთ.

უსასრულობის უარმყოფელი თვით ამ უარყოფის დროსაც უსასრულობას ვერ გაექცევა. ის, ვინც ამბობს, მაგალითად, რომ გარკვეული სასრული რაოდენობა ჭეშმარიტებათა არსებობს, თვით ამ დებულებით, რომლის წამოყენებას ის ცდილობს, როგორც გარკვეულ ჭეშმარიტების, ახდენს ამ რაოდენობის შეცვლას; ვინც ამბობს, რომ მხოლოდ n ჭეშმარიტება არსებობს, ამით თვით ცდილობს გარკვეულ $n+1$ ჭეშმარიტების გამოთქმას. შემდგომზე გადასვლა და კიდევ ერთი ნაბიჯის გადადგმის შესაძლებლობა უკვე დაკავშირებულია უსასრულობის ცნებასთან. თვით სასრულოს ცნება უსასრულობის კორელატურია და არ შეიძლება სასრულოს საფუძველზე უსასრულობის უარყოფა. ეხება რა ნეგელის შეხედულებას, რომ ჩვენ შეგვიძლია შევიცნოთ მხოლოდ სასრულო, ენგელსი თავის «ბუნების დიალექტიკაში» აჩვენებს, რომ ამით ნეგელის თავისდაუნებურად უსასრულობაც შემოყავს. თუგინდ იმ თვალსაზრისიდან გამოსვლით, რომ ჩვენ შეგვიძლია შევიცნოთ მხოლოდ სასრულო, გამოვა, რომ «ჩვენ შეგვიძლია შევიცნოთ ყველა სასრულო, რაც ჩვენი გრძნობითი აღთქმის სფეროში მოხვდება. სასრულო, რომელიც მოხვდება სფეროში და ა. შ., იძლევა ჯამში უსასრულოს, რადგან ნეგელი შეადგენს თავის წარმოდგენას უსასრულობაზე სწორედ ამ ჯამის საფუძველზე. ამ სასრულოს და ა. შ. გარეშე მას არ ექნებოდა არავითარი წარმოდგენა უსასრულობის შესახებ» [1].

უსასრულობის უარყოფა დაკავშირებულია ყალბ წარმოდგენასთან უსასრულობის შესახებ, იმასთან, რომ უსასრულობა წარმოდგენილი აქვთ სასრულოსაგან სრულებით განცალკევებულად და მოწყვეტილად და, რასაკვირველია, ასეთი უსასრულობა უკვე დამაჯერებლად არ გამოიყურება.

ლენინი თავის კონსპექტში ჰეგელის «ლოგიკის მეცნიერებისა» შეკუმშული და გამახვილებული სახით გადმოცემს სათანადო ადგილს ჰეგელიდან ასეთნაირად: [2] „«ყალბი უსასრულობა» — უსასრულობა თვისობრივად დაპირისპირებული სასრულოსთან, მასთან დაუკავშირებელი, მისგან გამიჯნული, ვითომდაც სასრულო იყოს ამ მხარეზე

---

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. XIV, 1931, стр. 354.
[2] В. И. Ленин. Философские тетради, 1936, стр. 111.

მყოფი, უსასრულო კი მიღმამყოფი, ვითომდაც უსასრულო იდგეს სასრულის ზემოთ, მის გარეშე...."

სასრულის და უსასრულის განუყრელობა, რასაკვირველია, მათ განურჩევლობას სრულებით არ ნიშნავს. პირიქით, სწორედ მათ განუყრელობაზეა ლაპარაკი. ჰეგელი სწორად შენიშნავს[1], რომ თუ უსასრულობას დავიჭერთ სასრულისაგან წმინდად და მისგან შორს, ჩვენ ამით მას სწორედ მხოლოდ ვასასრულოებთ[2].

ნაცვლად იმისა, რომ, მაგ., $\sqrt{2}$ განვიხილოთ, როგორც ისეთი რამ, რასაც მივიღებთ რაციონალურ რიცხვთაგან შემდგარ გარკვეულ უსასრულო სიმრავლეთა გავლის შემდეგ, მას განვიხილავთ როგორც თვით ასეთ სიმრავლეს. ამგვარ მიდგომის საფუძველზე აგებულია მთელი რიგი თეორიებისა ირაციონალურ რიცხვთა შესახებ. მე აქ ამ თეორიების შედარებას არ მოვახდენ[3]. ყველაზე ფართოდ გავრცელებულ თეორიაში, რომელიც დედეკინდს ეკუთვნის და შემდეგ ერთგვარად გაუმჯობესებული იყო სხვების მიერ, ძირითად როლს თამაშობს ეგრ. წოდ. განკვეთის ცნება. მიუთითებ ჩემ «მათემატიკური ანალიზის შესავალის» კურსზე (1938), სადაც ეს თეორია დალაგებულია სისტემატური სახით. იგივე კურსი შეიძლება გამოყენებული იყოს სხვა მათემატიკური თეორიების გასაცნობად, რომლების შესახებ შემდეგ იქნება საუბარი.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის განკვეთასთან დაკავშირებით შემოყვანილი იქნება ახალი ცნება — ნამდვილი რიცხვისა, რომელიც შეიძლება განსაზღვრული იყოს, როგორც განკვეთის ქვედაკლასი. ნამდვილი რიცხვი, ამგვარად, განსაზღვრულია როგორც რაციონალურ რიცხვთაგან შემდგარი გარკვეული სახის სიმრავლე. იმისდამიხედვით, არის თუ არა განაკვეთის ზედაკლასში უმცირესი ელემენტი, გავარჩევთ ნამდვილ რიცხვის ორ სახეს: პირველი სახის რიცხვებს შეგვიძლია ვუწოდოთ ნამდვილი რაციონალური რიცხვები

---

[1] Гегель. Сочинения, т. V, 1937, стр. 136.

[2] ამასთან დაკავშირებით შევნიშნავთ, რომ კანტორის მიერ ტრანსფინიტურის ცნების შემოყვანა არამცთუ აძლიერებს უსასრულობის ცნებას, არამედ, პირიქით, ასუსტებს მას და მოასწავებს მის დასასრულოებას (იხ. შემდეგ, თავი III, § 5-ის პირველი გვერდები). ტრანსფინიტურის ცნების შესახებ იხ. ჩემი შრომა: О трансфинитных числах. Труды второго Всесоюзного математического съезда, 1936, стр. 429—437.

[3] ამის შესახებ იხ. ჩემი შრომა: სიმრავლეთა დაყოფა კლასებად რეფლექსური, სიმეტრული და ტრანზიტული დამოკიდებულების საშუალებით. საქ. სსრ მეცნ. აკად. მოამბე, ტ. V, № 5, 1944, გვ. 493—502.

(ისინი შეგვიძლია ცალკეულ რაციონალურ რიცხვებს შეუსაბამოთ), მეორე სახის რიცხვები ირაციონალური რიცხვები იქნება. მაგალითად, $\sqrt{2}$ შეიძლება იყოს განსაზღვრული, როგორც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, შემდგარი უარყოფით რიცხვებისაგან, ნულისაგან და ისეთ დადებით რიცხვებისაგან, რომელთა კვადრატი 2-ზე ნაკლებია. $\sqrt{2}$ არის, ამგვარად, თითონ გარკვეული სიმრავლე რაციონალურ რიცხვთაგან შემდგარი, რომელიც, როგორც ასეთი, გვაქვს, და არა ისეთი რამ, რაც ლოგიკურად არ გვაქვს, მაგრამ რასაც შეგვიძლია ბევრად თუ ნაკლებად მიუახლოვდეთ სათანადო უსასრულო მიმდევრობის გავლით.

მტკიცდება, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ყოველგვარ განკვეთის შემთხვევაში ზედა კლასში არის უმცირესი ელემენტი, რითაც უკვე მჟღავნდება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის გარკვეული უპირატესობა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლესთან შედარებით.

შეგვიძლია განვიხილოთ იმგვარი ზოგადი ცნებები, რომლების მოცულობა წარმოდგენილია ნამდვილ რიცხვთაგან შემდგარ ამათუიმ სიმრავლით. ასეთ შემთხვევაში საქმე გვექნება ნამდვილ ცვლადებთან. მათემატიკურ ანალიზის საწყის დარგებში საქმე გვაქვს, უმთავრესად, ნამდვილ ცვლადებთან და ასეთ ცვლადების ფუნქციებთან.

3. ზღვარი

მათემატიკურ ანალიზის ერთერთ ძირითად ცნებას წარმოადგენს ზღვრის ცნება. ზღვრის ცნების შესახებ შეიძლება საკითხი დაისვას დალაგებულ ცვლადის ან დალაგებულ ცვლადის ფუნქციის მიმართ (ცვლადს ეწოდება დალაგებული, თუ მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე დალაგებულია, ე. ი. დამყარებულია გარკვეული ასიმეტრიული და ტრანზიტული ხასიათის დამოკიდებულება ამ სიმრავლის ელემენტთა შორის). შემდეგში, სიმოკლისათვის, ვიხმართ ტერმინს «ცვლადი» დალაგებულ ცვლადის ან დალაგებულ ცვლადის ფუნქციის აღსანიშნავად. ცვლადის მიმართ შეგვიძლია ვილაპარაკოთ მის წინა და შემდგომ მნიშვნელობებზე, დაკავშირებით აღებულ ასიმეტრიულ და ტრანზიტულ დამოკიდებულებასთან. თუ ცვლადი ფუნქციას წარმოადგენს, შემდგომ და წინა მნიშვნელობაზე ვილაპარაკებთ მისი არგუმენტის მიხედვით.

ზღვრის ცნება შეიძლება ასეთნაირად განმარტებული იყოს: ვიტყვით, რომ a რიცხვი არის x ცვლადის ზღვარი, ანუ x ცვლადი a რიცხვისაკენ მიისწრაფის (ეს ასე ჩაიწერება: $\lim x=a$), თუ ყო-

ველ დადებით ε რიცხვისათვის x-ის ისეთი მნიშვნელობა არსებობს, რომ x-ის მნიშვნელობანი (თუ x ფუნქციას წარმოადგენს, მისი არგუმენტისა) დაწყებული ამ მნიშვნელობიდან (ე. ი. ეს და ყველა შემდგომი მნიშვნელობანი ერთად) შეადგენენ რიცხვთა უსასრულო სიმრავლეს და ყველა მათთვის სხვაობა $x - a$ თავისი აბსოლუტური სიდიდით ε-ზე ნაკლებია [1].

არაა სავალდებულო, რომ ყოველ ცვლადს ზღვარი ჰქონდეს. მაგრამ მტკიცდება, რომ თუ ცვლადს ექნება ზღვარი, ეს ზღვარი იქნება ერთად ერთი [2].

---

[1] x-ის ისეთი მნიშვნელობა, რომელზედაც ზემოთ არის ლაპარაკი, შერჩეული იქნება აღებული ε-ის მიხედვით. ეხლა, თუ ფრაზა ისეა აგებული, რომ ჯერ x-ზეა ლაპარაკი და მერე ε-ზე, მაშინ ამის აღსანიშნავად, რომ ეს შესწორებულად უნდა იყოს წაკითხული, ლაპარაკობენ წინასწარ აღებულ ε-ზე, რითაც მიუთითებენ იმაზე, რომ ნამდვილად x-ის სათანადო მნიშვნელობა უნდა შერჩეული იყოს ε-ის მიხედვით. მაგრამ ის ცნება, რომელიც ზღვრის განმარტებაში მონაწილეობს, არის ცნება ყოველ დადებითი რიცხვის და არა «წინასწარ აღებული დადებითი რიცხვის». და, საზოგადოთ, არ შეიძლება სათანადო ცნება წარმოვიდგინოთ, როგორც ცნება «წინასწარ აღებულ რიცხვისა». თუ ჯერ ვიღებთ ამათუიმ დადებით რიცხვს და შემდეგ შევარჩევთ x-ის შესაბამის მნიშვნელობას, კონტექსტი, რომელშიაც ცნება ამათუიმ დადებითი რიცხვისა მ ო ნ ა წ ი ლ ე ო ბ ს, უკანა რიცხვით არ ცვლის ამ ცნებას და არ ხდის მას წინასწარ აღებულ დადებით რიცხვად. თუ ჩვენ ჯერ ვიღებთ ამათუიმ რიცხვს, ეს არ ნიშნავს, რომ უკვე ვიღებთ «ჯერ აღებულ ამათუიმ რიცხვს» და ა. შ.

[2] ზოგჯერ ცდილობენ ზღვრის ცალსახობის შესახებ დებულების ერთნაირ «შერბილებას» და ამბობენ, რომ შეუძლებლობა ჰქონდეს ცვლადს სხვადასხვა ზღვარი შეეხება ცვლადის მდგომარეობას ამათუიმ მომენტში და არა საერთოდ. ამგვარად საქმის წარმოდგენა ყოვლად გაუმართლებელია. ცვლადის სხვადასხვა მომენტები — ეს არის მხოლოდ ფიგურალური გამოთქმა, რომლის ქვეშ იგულისხმება ცვლადის სხვადასხვა მნიშვნელობანი. ლაპარაკი ცვლადის ზღვარზე სხვადასხვა მომენტისათვის — ეს იქნებოდა ლაპარაკი ცვლადის ზღვარზე მის ამათუიმ მნიშვნელობისათვის. ზღვრის ცნება კი შეეხება ცვლადს, როგორც ასეთს, ყველა მისი მნიშვნელობებით და დებულება ზღვრის ცალსახობის შესახებ სწორედ გვეუბნება, რომ მ ა ს ერთზე მეტი ზღვარი არ შეიძლება ჰქონდეს.

გამოთქმები: ცვლადის ადრინდელი და გვიანდელი მნიშვნელობანი და ა. შ. იხმარებიან, საზოგადოთ, რიგის გამოსათქმელად ცვლადის მიმართ და არა მაინცდამაინც დროის მნიშვნელობით. თვით რიგი დროის გასწვრივ კვლავ ამაჯე დროს დახმარებით განსაზღვრული კი არ არის, არამედ დაკავშირებულია რიგის ზოგად ცნებასთან.

თუ ჩვენ განვიხილავთ, მაგალითად, ცვლადს, რომელიც იცვლება 0-დან 1-მდე და დალაგებულია ზრდადობის მიმართულებით, ამ ცვლადის ერთადერთი ზღვარი იქნება 1. არ შეიძლება იმის თქმა, რომ ჩვენი ცვლადი, სანამ ერთისა-

ზღვრის განმარტების მიხედვით, თუ მოცემულია, ერთის მხრით, რაიმე x ცვლადი, ხოლო, მეორეს მხრით, დასახელებულია გარკვეული a რიცხვი, შეიძლება შემოწმდეს, არის თუ არა ეს a რიცხვი x ცვლადის ზღვარი. მაგრამ, რასაკვირველია, სასურველია, რომ ამაზე უკეთესი მდგომარეობა გვქონდეს: საიდან გაჩნდა ის რიცხვი, რომლის შესახებ ჩვენ ეჭვი გვაქვს, რომ ის x ცვლადის ზღვარია? სასურველია არა მარტო ის, რომ, როცა გვისახელებენ გარკვეულ რიცხვს, შეგვეძლოს შემოწმება, რომ ის x-ის ზღვარია, არამედ ისიც, რომ თვით ასეთი რიცხვი ავაგოთ x ცვლადის დახმარებით. ამისათვის საჭიროა უფრო ღრმად იყოს გამოკვლეული დამოკიდებულება ცვლადსა და მის ზღვარს შორის.

დავსვათ საკითხი: ზღვარი და ზღვრის არსებობა არის თუ არა შემთხვევითი და გარეგანი ცვლადის და მის ხასიათის მიმართ, თუ, პირიქით, მათ შორის უფრო მჭიდრო კავშირი არსებობს? თუ პირველ შემთხვევას ექნება ადგილი, ამდენადვე ზღვრის ცნება თავის მნიშვნელობას და ფასს დაკარგავს. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ეს ასე არ არის. თურმე ზღვარი და მისი არსებობა, თუ საქმე ნამდვილ ცვლადთან გვაქვს, მჭიდროთ დაკავშირებულია თვით ცვლადთან და მის ხასიათთან. თვით ცვლადის ცვალების ხასიათი ადრევე გვეტყვის, აქვს თუ არა ამ ცვლადს ზღვარი, და რიცხვი, რომელიც ცვლადის ზღვარი გამოდგება, თვით ცვლადის საშუალებით შეიძლება აგებული იყოს.

ზღვრის არსებობა და მნიშვნელობა თვით ცვლადით და მისი ხასიათით იქნება გამართლებული. ამ მხრივ განსაკუთრებულ როლს თამაშობს კოშის თეორემა, რომელიც სწორედ პირველად ამგვარ კავშირს ამყარებს და წარმოადგენს ზღვართა თეორიის ძირითად დებულებას. კოშის დებულება გვიჩვენებს, რომ ზღვრის არსებობი-

---

კენ მიისწრაფის, ჯერ მიისწრაფის, მაგ., $\frac{1}{2}$-კენ და ა. შ.; თუ ავიღებთ ეხლა ცვლადს, რომელიც იცვლება 0-დან $\frac{1}{2}$-მდე, ეს ახალი ცვლადი იქნება და მასაც მხოლოდ ერთი ზღვარი ექნება, ამ შემთხვევაში ნახევარი. მეორე ცვლადი პირველ ცვლადში კი არ არის გახვეული და მის შიგნით მოთავსებული, არამედ ის სხვა ცვლადია. თუ ცვლადი მხოლოდ ერთნაირ ქერქს წარმოადგენს მეორე ცვლადისათვის, უკანასკნელიც ასეთსავე მდგომარეობაში ჩავარდება და ლოგიკურად ყალბ მდგომარეობას მივიღებთ. ამ საკითხს ჩვენ შემდეგში კიდევ დაუბრუნდებით მარქსის თვალსაზრისის განხილვის დროს ცვლადი სიდიდის შესახებ.

სათვის ცვლადი უნდა იყოს სრულებით მკაფიო თავისებურების მატარებელი. იმისათვის, რომ ცვლადს ზღვარი ჰქონდეს, საჭიროა, რომ ყოველ დადებით რიცხვისათვის არსებობდეს ცვლადის ცვალების ისეთი საფეხური, რომ ცვლადის შემდგომი ცვალება ამ დასახელებულ რიცხვზე ნაკლები იყოს ე. ი. ცვლადის მნიშვნელობათა ერთი მეორესაგან გადახრა, თუ ცვალების პროცესი საკმაოდ შორსაა წასული, რაგინდ მცირე იყოს, ან, კიდევ უფრო მარტივად რომ ვთქვათ, ცვლადი შორეულ საფეხურების შემდეგ „თითქმის" გაჩერებულსავით სჩანდეს.

ზუსტი სახით კოშის თეორემა ასეთნაირად ჩამოყალიბდება. აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ არსებობდეს x ცვლადის ზღვარი იმაში მდგომარეობს, რომ ყოველ დადებით ε რიცხვისათვის x-ის ისეთი მნიშვნელობა x_1 არსებობდეს, რომ დაწყებული ამ მნიშვნელობიდან დარჩენილი იყოს კიდევ უსასრულო სიმრავლე x-ის მნიშვნელობათა, ანდა არგუმენტის მნიშვნელობათა, თუ x ფუნქციას წარმოადგენს; და x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, x_1-დან დაწყებული, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას $|x-a|<\varepsilon$.

კოშის თეორემის აუცილებლობა ძალიან მარტივი ხასიათის გარემოებით არის უზრუნველყოფილი და ამ აუცილებლობას ადგილი აქვს არა მარტო ნამდვილ რიცხვებზე გადასვლის შემდეგ, არამედ რაციონალურ რიცხვთა ფარგლებში დარჩენის პირობებშიაც. მთავარი კვანძი კოშის თეორემისა მის იმ ნაწილში მდგომარეობს, რომელიც პირობის საკმარისობას შეეხება. თუ გვაქვს გარკვეული ცვლადი, რომელიც კოშის თეორემას აკმაყოფილებს, უნდა შევადგინოთ ამ ცვლადის ზღვარი და ამ გზით ვაჩვენოთ, რომ ცვლადს ზღვარი აქვს. სწორედ აქ ხდება თითონ აღებული ცვლადის საფუძველზე ისეთი რიცხვის აგება, რომელიც მისი ზღვარი გამოდგება. ამ შემთხვევაში გამოვდივართ x ცვლადისაგან, რომლის შესახებ ვგულისხმობთ, რომ ის კოშის თეორემის პირობას აკმაყოფილებს. უნდა შევადგინოთ ისეთი რიცხვი, რომელიც x-ის ზღვარი იქნება. ასეთ რიცხვს თავიდანვე ვერ შემოვიყვანთ როგორც ისეთ რიცხვს, რომელიც x-ის ზღვარია, რადგან საკითხი სწორედ შეეხება ასეთ რიცხვს და მის არსებობას და თვით ეს საკითხი თავისივე პასუხი ვერ იქნება. ჩვენ უნდა შევადგინოთ გარკვეული რიცხვი, რომ ამის შემდეგ სწორედ გამოვარკვიოთ, რომ ის ცვლადის ზღვარია. ამისათვის x ცვლადის დახმარებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს გარკვეულნაირად ორ კლასად გავყოფთ და ამ გაყოფის შესახებ ვაჩვე-

ნებთ, რომ ის განკვეთას წარმოადგენს. ამით უკვე გვაქვს გარკვეული ნამდვილი რიცხვი, რომელიც აღვნიშნოთ, მაგალითად, a-თი. ამგვარად, გარკვეული რიცხვი შემოყვანილია და, რასაკვირველია, ჯერ ისე, რომ x-ის ზღვარზე ლაპარაკი არ არის. სწორედ ამის შემდეგ ვაჩვენებთ, რომ ეს a რიცხვი x-ის ზღვარს წარმოადგენს. ეს იქნება არა a რიცხვის განსაზღვრა — ის უკვე განსაზღვრულია და ხელახალი განსაზღვრა არ ესაჭიროება, არამედ ამ უკვე განსაზღვრული რიცხვის გარკვეული თვისების ჩვენება. ამითვე, რასაკვირველია, ნაჩვენები იქნება, რომ x ცვლადის ზღვარი არსებობს.

კოშის თეორემა, როგორც ვთქვით, ამყარებს ღრმა კავშირს ცვლადსა და მის ზღვარს შორის. ის გვიჩვენებს, რომ ზღვარი ცვლადის მიღმა და, ასე ვთქვათ, უსასრულობაში გადაკარგული კი არ არის, არამედ თვით ცვლადის მიერ არის მოცემული. აღებული ცვლადის ზღვრის არსებობას ბრმა და შემთხვევითი ხასიათი კი არ აქვს, არამედ ის თვით ცვლადის ხასიათით არის გამართლებული. ზღვრის შესახებ საკითხი დაისმება არა იმის შემდეგ, რაც ცვლადმა მთელი თავისი გზა გაიარა, არამედ თავიდანვე, თითონ აღებულ ცვლადთან დაკავშირებით. აქ არავითარ ლოგიკურ მიახლოვებაზე და მიუღწევლობაზე არ შეიძლება ლაპარაკი. ზღვარი, როგორც ასეთი, სავსებით და ლოგიკურად დასრულებულად განსაზღვრულია თვით ცვლადის საშუალებით. სათანადო რიცხვი თავიდანვე კი არ არის შემოყვანილი როგორც ზღვარი, როგორც განუსაზღვრელი მიახლოვების შედეგი, რომლის მიმართ აღებული ცვლადის შედარება და თვით მიახლოვების დადასტურება უკვე შეუძლებელი გახდება, არამედ თვით ცვლადის საშუალებით არის განსაზღვრული გარკვეული რიცხვი, რომლის შესახებ შემდეგ ირკვევა, რომ ის არის ცვლადის მიმართ ზღვრის დამოკიდებულებაში.

ამგვარად, ზღვრის მისაღებად არ არის საჭირო ბრმად და კვალდაკვალ ვსდიოთ ცვლადს და ვნახოთ თავის უსასრულო გზის გავლის შემდეგ დააკაკუნებს თუ არა ის ზღვრის კარებში. ცვლადის ცვალებას მთლიანი ხასიათი აქვს და, თუ ერთ მნიშვნელობას წინა რიგი აქვს და მეორეს შემდგომი, ეს არ ნიშნავს, რომ ლოგიკურადაც პირველი წინ უსწრებს მეორეს და ყველა ეს მნიშვნელობანი ლოგიკურად წინ უსწრებენ ზღვარს. საქმე ასე რომ იყოს, მაშინ ზღვრის ცნება ლოგიკურად ყალბ მდგომარეობაში იქნებოდა. ზღვარი, როგორც დავინახეთ, არის არა ტრანსცენდენტური ცვლადის მიმართ, არამედ თვით ცვლადის საშუალებით მოცემულია.

როცა ვსვამთ საკითხს ზღვრის შესახებ, საქმე ისეთნაირად არ უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ თვით ცვლადი უნდა გაჰქრეს და დაუთმოს ადგილი ზღვარს. ასეთ შემთხვევაში ზღვარს მართლაც ექნებოდა უსასრულობაში ერთნაირად გადაკარგული ხასიათი. როცა ზღვარზეა ლაპარაკი, საკითხი ისე კი არ დგას, გადაიქცევა თუ არა ცვლადი მის ზღვარად, არამედ აქ გვაქვს მხედველობაში გარკვეულ ხასიათის დამოკიდებულება, ერთის მხრით, ცვლადსა და, მეორეს მხრით, ამ ცვლადის საფუძველზე მიღებულ გარკვეულ რიცხვს შორის, და თითოეული მათგანი რჩება იმათვე, რაც არის. საზოგადოთ, როცა ცვლადი გვაქვს, საქმე ისე კი არ უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ ის დამატებით იცვლება და ღ ე ბ უ ლ ო ბ ს თავის ამათუიმ მნიშვნელობას. ეს ცალკეული მნიშვნელობანი თვით ცვლადის ცნებასთანაა განუყრელად დაკავშირებული, და არა ცვლადის დამატებითი თავგადასავალის შედეგია.

ჩვენ ვლაპარაკობთ ცვლადის ამათუიმ მნიშვნელობაზე და არა თვით ცვლადი გადაიქცევა მ ი ს ამათუიმ მნიშვნელობად. ცვლადის ცალკეული მნიშვნელობა არ უნდა იყოს გაგებული, როგორც ამათუიმ რიცხვის ჩ ა ს მ ა ცვლადის ნ ა ც ვ ლ ა დ. ეს მნიშვნელობანი თვით ცვლადის ცნებაშია ნაგულისხმევი. როცა ვლაპარაკობთ ზოგადის ამათუიმ ცალკეულზე, ეს არ ნიშნავს, რომ ზოგადი უკვე გაჰქრა და გადაიქცა ამათუიმ ცალკეულად. ზოგადი ცალკეულთან განუყრელია, თვით ამ ცალკეულების საშუალებით არის მოცემული. ცალკეული სწორედ ზოგადის ცალკეულია.

ცვლადის სხვადასხვა მნიშვნელობის შესაძლებლობა, როგორც ვთქვით, თვით ცვლადის ცნებასთან არის განუყრელად დაკავშირებული, და ეს ცალკეული მნიშვნელობანი სრულებით არ ნიშნავს, რომ ცვალება ერთნაირად შესუსტებულია და ცვლადის ნაცვლად გვაქვს მხოლოდ უძრაობის მდგომარეობათა თავმოყრა. ამ საკითხს ჩვენ კიდევ დაუბრუნდებით, როცა მოვახდენთ მარქსის მიერ შესრულებულ ცვლადი სიდიდის ანალიზის განხილვას.

ეხლა, რაც შეეხება პრობლემას ზღვრის მიღწევადობის ან მიუღწევადობის შესახებ, ეს პრობლემა ზედაპირულად იქნებოდა განხილული, თუ ის დაუკავშირდებოდა საკითხს იმის შესახებ—ცვლადის მნიშვნელობათა შორის შეგვხვდება თუ არა ისეთი, რომელიც ზღვრის მნიშვნელობის ტოლია. უკანასკნელი საკითხი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რომელ ცვლადთან გვაქვს საქმე და ეს საკითხი შედარებით მეორეხარისხოვანია და მას პრინციპიალური მნიშვნელობა არა

აქვს. ზღვრის «მიღწევადობის» საკითხის უფრო ღრმა მნიშვნელობა იმასში მდგომარეობს — არის თუ არა ზღვართა თეორია ისე აგებული, რომ ცვლადის საშუალებით ლოგიკურად დასრულებული სახით განსაზღვრულია რიცხვი, რომელიც ცვლადის ზღვარი გამოდგება. ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ზღვართა თეორიის მიმართ, რომელიც ნამდვილ ცვლადის ცნებასთან დაკავშირებით არის აგებული, ამ კითხვაზე უნდა გაეცეს დადებითი პასუხი.

შეიძლება ნაჩვენები იყოს, რომ რაციონალურ რიცხვთა ფარგლებში დარჩენით კოშის თეორემას, სახელდობრ კოშის პირობის საკმარისობას, ადგილი არ ექნებოდა. უკვე ეს გვიჩვენებს, რომ რაციონალურ რიცხვთა ფარგლებში დარჩენით ზღვართა თეორია ვერ იქნებოდა აგებული ლოგიკურად დამაკმაყოფილებელი სახით, რომ მხოლოდ ნამდვილ რიცხვებზე გადასვლის შემდეგ ზღვართა თეორია შეიძლება რაციონალური სახით იყოს აგებული. ცხადია, რომ თვით ნამდვილი და, კერძოთ, ირაციონალური რიცხვები ზღვრის ცნების საშუალებით განსაზღვრული ვერ იქნება. პირიქით, ნამდვილ რიცხვთა თეორია ზღვართა თეორიას უნდა უსწრებდეს.

კოშის თეორემა ახალ დადასტურებას იძლევა ნამდვილ რიცხვთა შემოყვანის საჭიროებისა და მისი ძირითადი მნიშვნელობისა მათემატიკურ ანალიზისათვის.

ნამდვილ ცვლადზე გადასვლის შემდეგ მათემატიკას საშუალება აქვს ცვლადის დახმარებით უკეთ ასახოს მოძრაობის პროცესები. წერტილის გაჩერება მოძრაობის შემდეგ თვით მოძრაობის ხასიათთან არის მჭიდროთ დაკავშირებული. სანამ წერტილი გაჩერდება, მანამ მისი გადანაცვლების ზომა რაგინდ მცირე ხდება და ის უძრავ მდგომარეობას უახლოვდება. სწორედ ამ გარემოების მათემატიკურ ასახვას წარმოადგენს კოშის თეორემა, რომელიც ძალაშია ნამდვილ ცვლადისათვის.

4. წარმოებული

ფუნქციის ხასიათის და ყოფაქცევის შესწავლისათვის ძირითადი მნიშვნელობა აქვს ერთნაირ შედარებას დამოუკიდებელ ცვლადის მიერ განცდილ ცვლილებისა ფუნქციის შესაბამის ცვლილებასთან. ამ საქმის მოგვარებას შეიძლება ასეთნაირად მიუდგეთ. თუ ავიღებთ x ცვლადის რაიმე ორ მნიშვნელობას x_1 და x_2-ს, იმ ცვლილების ზომის გამოსახატავად, რომელიც x ცვლადმა განიცადა x_1-დან x_2-ზე

გადასვლისას, შეიძლება ვისარგებლოთ სხვაობით $x_2 - x_1$, რომელსაც უწოდებთ x ცვლადის ნაზრდს მნიშვნელობიდან x_1 მნშვნელობაზე x_2 გადასვლის შემთხვევაში. x ცვლადის ნაზრდი მოკლედ აღინიშნება Δx. y ცვლადის შესაბამისი ნაზრდი Δy იქნება $f(x_2) - f(x_1)$.

ეხლა იმისათვის, რომ გარკვეული ცნება შემოვიღოთ, რომელიც გამოთქვამს ფუნქციის ცვალების სიჩქარეს, ბუნებრივია დავიწყოთ ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ განხილვიდან. მაგრამ ეს შეიძლება იყოს მხოლოდ საქმის დაწყება. საქმე ისაა, რომ Δy Δx-ის პროპორციული შეიძლება არ იყოს და შეფარდება $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ერთიდაიგივე არ იყოს Δx-ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. ეს იმის გამომხატველია, რომ არაა სავალდებულო ყოველი ფუნქციისათვის, რომ ის თანაბრად იცვლებოდეს. ასეთ პირობებში $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ჯერ-ჯერობით გამოთქვამს მხოლოდ ფუნქციის ცვალების საშუალო სიჩქარეს, როცა არგუმენტი იცვლება x-დან $x+\Delta x$-მდე.

ბუნებრივია, რომ იმ კერძო შემთხვევაში, როცა ფუნქციის ცვალება თანაბარია და $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-ის მნიშვნელობა ერთიდაიგივეა სხვადასხვა Δx-თვის, ეს საშუალო სიჩქარე მივიღოთ იმავე დროს ფუნქციის ცვალების ნამდვილ სიჩქარეთ აღებულ x წერტილზე. როცა კი ასეთ თანაბრობას ადგილი არა აქვს, სიჩქარის ცნებას გარკვეული განვითარება ესაჭიროება იმისათვის, რომ მივიღოთ ცნება ფუნქციის სიჩქარისა აღებულ წერტილზე. ამისათვის ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ რაც Δx ნულთან უფრო ახლოს არის, იმდენად ცვალება უფრო უახლოვდება თანაბარს, და იმ მრუდის სათანადო ნაწილაკი, რომელიც აღებულ ფუნქციის გრაფიკს წარმოადგენს, უახლოვდება თავის ფორმით სწორს. ასეთ პირობებში შეიძლება კაცს მოეჩვენოს, რომ საუკეთესო გამოსავალი ის იქნება, რომ Δx პირდაპირ მივიღოთ ნულის ტოლი. აქ, მართალია, სიძნელე, რომელსაც ცვალების არათანაბარი ხასიათი იწვევს, ჭარბობით იქნება თავიდან აცილებული, მაგრამ იმის ხარჯზე, რომ თვით საკითხის დაყენება იხსნება და, საზოგადოდ, არავითარ ცვლილებას არ განვიხილავთ, რადგან თუ Δx ნულია, მაშინ, ნაცვლად იმისა, რომ ფუნქციის მნიშვნელობას x წერტილზე შევადაროთ მისი მნიშვნელობა სხვა წერტილებზე,

აქვს. ზღვრის «მიღწევადობის» საკითხის უფრო ღრმა მნიშვნელობა იმაში მდგომარეობს — არის თუ არა ზღვართა თეორია ისე აგებული, რომ ცვლადის საშუალებით ლოგიკურად დასრულებული სახით განსაზღვრულია რიცხვი, რომელიც ცვლადის ზღვარი გამოდგება. ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ზღვართა თეორიის მიმართ, რომელიც ნამდვილ ცვლადის ცნებასთან დაკავშირებით არის აგებული, ამ კითხვაზე უნდა გაეცეს დადებითი პასუხი.

შეიძლება ნაჩვენები იყოს, რომ რაციონალურ რიცხვთა ფარგლებში დარჩენით კოშის თეორემას, სახელდობრ კოშის პირობის საკმარისობას, ადგილი არ ექნებოდა. უკვე ეს გვიჩვენებს, რომ რაციონალურ რიცხვთა ფარგლებში დარჩენით ზღვართა თეორია ვერ იქნებოდა აგებული ლოგიკურად დამაკმაყოფილებელი სახით, რომ მხოლოდ ნამდვილ რიცხვებზე გადასვლის შემდეგ ზღვართა თეორია შეიძლება რაციონალური სახით იყოს აგებული. ცხადია, რომ თვით ნამდვილი და, კერძოთ, ირაციონალური რიცხვები ზღვრის ცნების საშუალებით განსაზღვრული ვერ იქნება. პირიქით, ნამდვილ რიცხვთა თეორია ზღვართა თეორიას უნდა უსწრებდეს.

კოშის თეორემა ახალ დადასტურებას იძლევა ნამდვილ რიცხვთა შემოყვანის საჭიროებისა და მისი ძირითადი მნიშვნელობისა მათემატიკურ ანალიზისათვის.

ნამდვილ ცვლადზე გადასვლის შემდეგ მათემატიკას საშუალება აქვს ცვლადის დახმარებით უკეთ ასახოს მოძრაობის პროცესები. წერტილის გაჩერება მოძრაობის შემდეგ თვით მოძრაობის ხასიათთან არის მჭიდროთ დაკავშირებული. სანამ წერტილი გაჩერდება, მანამ მისი გადანაცვლების ზომა რაგინდ მცირე ხდება და ის უძრავ მდგომარეობას უახლოვდება, სწორედ ამ გარემოების მათემატიკურ ასახვას წარმოადგენს კოშის თეორემა, რომელიც ძალაშია ნამდვილ ცვლადისათვის.

4. წარმოებული

ფუნქციის ხასიათის და ყოფაქცევის შესწავლისათვის ძირითადი მნიშვნელობა აქვს ერთნაირ შედარებას დამოუკიდებელ ცვლადის მიერ განცდილ ცვლილებისა ფუნქციის შესაბამის ცვლილებასთან. ამ საქმის მოგვარებას შეიძლება ასეთნაირად მიუდგეთ. თუ ავიღებთ x ცვლადის რაიმე ორ მნიშვნელობას x_1 და x_2-ს, იმ ცვლილების ზომის გამოსახატავად, რომელიც x ცვლადმა განიცადა x_1-დან x_2-ზე

გადასვლისას, შეიძლება ვისარგებლოთ სხვაობით $x_2 - x_1$, რომელსაც უწოდებთ x ცვლადის ნაზრდს მნიშვნელობიდან x_1 მნიშვნელობაზე x_2 გადასვლის შემთხვევაში. x ცვლადის ნაზრდი მოკლედ აღინიშნება Δx. y ცვლადის შესაბამისი ნაზრდი Δy იქნება $f(x_2) - f(x_1)$.

ეხლა იმისათვის, რომ გარკვეული ცნება შემოვიღოთ, რომელიც გამოთქვამს ფუნქციის ცვალების სიჩქარეს, ბუნებრივია დავიწყოთ ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ განხილვიდან. მაგრამ ეს შეიძლება იყოს მხოლოდ საქმის დაწყება. საქმე ისაა, რომ Δy Δx-ის პროპორციული შეიძლება არ იყოს და შეფარდება $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ერთიდაიგივე არ იყოს Δx-ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. ეს იმის გამომხატველია, რომ არაა სავალდებულო ყოველი ფუნქციისათვის, რომ ის თანაბრად იცვლებოდეს. ასეთ პირობებში $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ჯერ-ჯერობით გამოთქვამს მხოლოდ ფუნქციის ცვალების საშუალო სიჩქარეს, როცა არგუმენტი იცვლება x-დან $x + \Delta x$-მდე.

ბუნებრივია, რომ იმ კერძო შემთხვევაში, როცა ფუნქციის ცვალება თანაბარია და $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-ის მნიშვნელობა ერთიდაიგივეა სხვადასხვა Δx-თვის, ეს საშუალო სიჩქარე მივიღოთ იმავე დროს ფუნქციის ცვალების ნამდვილ სიჩქარეთ აღებულ x წერტილზე. როცა კი ასეთ თანაბრობას ადგილი არა აქვს, სიჩქარის ცნებას გარკვეული განვითარება ესაჭიროება იმისათვის, რომ მივიღოთ ცნება ფუნქციის სიჩქარისა აღებულ წერტილზე. ამისათვის ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ რაც Δx ნულთან უფრო ახლოს არის, იმდენად ცვალება უფრო უახლოვდება თანაბარს, და იმ მრუდის სათანადო ნაწილაკი, რომელიც აღებულ ფუნქციის გრაფიკს წარმოადგენს, უახლოვდება თავის ფორმით სწორს. ასეთ პირობებში შეიძლება კაცს მოეჩვენოს, რომ საუკეთესო გამოსავალი ის იქნება, რომ Δx პირდაპირ მივიღოთ ნულის ტოლი. აქ, მართალია, სიძნელე, რომელსაც ცვალების არათანაბარი ხასიათი იწვევს, ჭარბობით იქნება თავიდან აცილებული, მაგრამ იმის ხარჯზე, რომ თვით საკითხის დაყენება იხსნება და, საზოგადოდ, არავითარ ცვლილებას არ განვიხილავთ, რადგან თუ Δx ნულია, მაშინ, ნაცვლად იმისა, რომ ფუნქციის მნიშვნელობას x წერტილზე შევადაროთ მისი მნიშვნელობა სხვა წერტილებზე,

ჩვენ ვიმეორებთ ფუნქციის მნიშვნელობას იმავე x წერტილზე. ამგვარი მიდგომა იმის მსგავსია, რომ, მონტენის გამოთქმას თუ ვიხმართ, ავადმყოფობა მოვსპოთ ავადმყოფის სიკვდილით, ან თუ მივმართავთ უფრო ნაკლებად პრეტენციოზულ შედარებას, ყურები დავიცვათ იმისათვის, რომ ხმაურობა არ გვიშლიდეს მუსიკის მოსმენას.

თუ არგუმენტის ნაზრდი ნულის ტოლია, ფუნქციის ნაზრდიც ნულის ტოლი იქნება და შეფარდების $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ნაცვლად გვექნება $\frac{0}{0}$, რაც არითმეტიკულად გაუმართლებელ ოპერაციას წარმოადგენს, რადგან ყოველი რიცხვი ნულზე გამრავლებული ნულის ტოლია, და ამიტომ $\frac{0}{0}$ არის სრულებით განუსაზღვრელი ხასიათის სიდიდე, ერთნაირის უფლებით გამოთქვამს ყველა შესაძლებელ რიცხვს, იძლევა მთელ მათ სიმრავლეს.

მთელი საქმე იმასშია, რომ Δx ნულისაგან განსხვავებული დავტოვოთ და ამავე დროს ავიცდინოთ ის სიძნელე, რომელიც დაკავშირებულია ცვალების არათანაბრობასთან. თუ კი ავიღებთ Δx-თვის რაიმე გარკვეულ საკმაოდ მცირე რიცხვს, ცვალების არათანაბრობა მცირე იქნება, მაგრამ მაინც იქნება, ხოლო ასეთი მდგომარეობა ჩვენ საბოლოოდ ვერ დაგვაკმაყოფილებს, რადგან ჩვენ აქ გვაინტერესებს თეორიული გადაწყვეტა საკითხისა, გარკვეული ცნების აგება, რომელიც თავის თვისობრივი ხასიათით გამოთქვამს ფუნქციის ცვალების სიჩქარის აზრს, ხოლო სათანადო არითმეტიკული მიახლოვებანი არ ნიშნავს, რომ ამ გზით ლოგიკურადაც ახლოს ვართ ჩვენთვის საჭირო ცნებასთან და ამიტომ შეგვიძლია დავკმაყოფილდეთ ამათუიმ «მიახლოვებით».

ასეთ პირობებში დარჩენილია ერთადერთი გამოსავალი: Δx განვიხილოთ როგორც ცვლადი სიდიდე, რომელიც ნულისაკენ მიისწრაფის, როგორც უსასრულოდ მცირე. მაშინ შეფარდება $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ იცვლება, საზოგადოთ, Δx-თან ერთად. ამ ცვლადის არავითარ ცალკეულ მნიშვნელობაზე შეჩერება, რაგინდ შორეული საფეხური არ ავიღოთ, ჩვენ არ დაგვაკმაყოფილებს, რადგან ამ გზით შეიძლება მხოლოდ მიახლოვების გაუმჯობესება. ასეთ პირობებში, თუ ჩვენ გარკვეულ რიცხვს ვეძებთ, რომლის საშუალებით გვინდა გამოვთქვათ ფუნქციის ცვალების სიჩქარე, ბუნებრივია, ნაცვლად იმისა, რომ შევჩერდეთ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-ის რაიმე მნიშვნელობაზე, თუგინდ ძალიან შორეულზე, განვიხილოთ ამ ცვლადის ზღვარი.

რასაკვირველია, არ არის სავალდებულო, რომ შეფარდებას $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ყოველთვის ჰქონდეს ერთიდაიგივე ზღვარი, როგორი გზითაც Δx ნულისაკენ არ უნდა მიისწრაფოდეს. მაგრამ ჩვენ სწორედ ის შემთხვევა გვაინტერესებს, როცა ასეთი ზღვარი არსებობს. ამ ზღვარს ვუწოდებთ ფუნქციის წარმოებულს აღებულ წერტილზე. $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული თითონაც x-ის ფუნქციას წარმოადგენს და ჩვეულებრივად აღინიშნება $f'(x)$.

თითონ ის გზა, რომლითაც წარმოებულის ცნება შემოყვანილი იყო, გვეუბნება, რომ ეს ცნება მოწოდებულია გამოსახოს ფუნქციის ცვალების სიჩქარე აღებულ წერტილზე. როცა ვლაპარაკობთ ფუნქციის სიჩქარეზე აღებულ წერტილზე, ეს იმას არ ნიშნავს, რომ ცვალებას განვიხილავთ წერტილის ფარგლებში, არგუმენტის ნაზრდს ვიღებთ ნულის ტოლად და, მაშასადამე, ფუნქციის საწყის და ბოლო მნიშვნელობას ერთსადაიგივეს. მთელი საქმე იმასშია, რომ ვიღებთ x-ის ნულისაგან განსხვავებულ ნაზრდს Δx, შუალედში x და $x+\Delta x$ განვიხილავთ ცვალებას, შევადგენთ შეფარდებას $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ და შემდეგ, იმის მერე, რაც ასეთი შეფარდების შედგენა უკვე მოვასწარით, გადავდივართ ზღვარზე. იმის ნაცვლად, რომ ჯერ ცალკე Δx და Δy-თვის გადავიდეთ ზღვარზე, Δx-ის ნულისაკენ მისწრაფებასთან დაკავშირებით — Δy-ის ზღვარი ნული იქნება, თუ ვიგულისხმებთ, რომ აღებული ფუნქცია განუწყვეტელია — და შემდეგ განვიხილოთ შეფარდება — ეს უკვე დაგვიანებული გამოვა, რადგან განუზღვრელობას მივიღებთ $\frac{0}{0}$, რომელიც არავითარ გარკვეულ რიცხვს არ წამოწევს, ამის ნაცვლად ვახდენთ სათანადო ოპერაციებს შებრუნებულის მიმდევრობით: ჯერ ვიღებთ შეფარდებას და ამის შემდეგ თვით ამ შეფარდებისათვის გადავდივართ ზღვარზე. ეს შეფარდების ზღვარი უკვე არ მიიყვანება მრიცხველის და მნიშვნელის ზღვრების შეფარდებაზე, რადგან სათანადო დებულება იმ შემთხვევაშია ძალაში, როცა მნიშვნელის ზღვარი ნულისაგან განსხვავებულია.

საქმე ისეთნაირად არ უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-ის ზღვრის მოძებნით ჩვენ გამოვავლენთ იმ დაფარულ რიცხვს, რომელიც შენიღბულია არითმეტიკული განუსაზღვრელობით $\frac{0}{0}$. თითონ

თავის ხასიათის მიხედვით $\frac{0}{0}$ განუზღვრელობას წარმოადგენს, ის ერთბაშად ყველა რიცხვებს იძლევა და არავითარ რიცხვს სხვებისაგან განსხვავებით და სხვების ფონზე არ გამოყოფს. საქმე ისე კი არ უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ ჩვენ არ ვიცით სახელდობრ რომელი რიცხვი იგულისხმება $\frac{0}{0}$-ის ქვეშ, არამედ სწორედ ისე, რომ $\frac{0}{0}$ არავითარ გარკვეულ რიცხვს არ წამოწევს.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$-ის შეფარდების ზღვარი იმ რიცხვს კი არ გამოავლენს, რომელიც იმალება $\frac{0}{0}$-ის ქვეშ, არამედ აქ სრულებით სხვა საკითხი წყდება. მართალია, უსასრულოდ მცირეთა შეფარდების ზღვრისათვის სხვადასხვა კონკრეტულ შემთხვევაში შეიძლება მდგომარეობა სხვადასხვაგვარი იყოს, მაგრამ თითოეულ ცალკეულ შემთხვევაში მდგომარეობა გარკვეული იქნება და სათანადო მეთოდების დახმარებით იქნება მოცემული ზოგადი საშუალებები ცალკეულ შემთხვევებში ზღვრების მოძებნისათვის. $\frac{0}{0}$-თვის კი არავითარი სხვადასხვა ცალკეული შემთხვევები არ გვექნება, და ის, მთლიანად აღებული, წარმოადგენს განუზღვრელობას და ამ მხრივ მდგომარეობას ვერაფერი შეცვლის.

ფუნქციის ცვალების სიჩქარის პრობლემის გადასაწყვეტად ჩვენ ფუნქციის ნაზრდს ვერც ნულის ტოლს მივიღებთ და არც ნულისაგან განსხვავებული, თუგინდ ძალიან მცირე სიდიდე, დაგვაკმაყოფილებს. ჩვენ ეხლა რომ ეს ორი მოთხოვნილება მექანიკურად შევაერთოდ და განვიხილოთ რაიმე რიცხვი, რომელიც ერთდროულად ნულია და ნულისაგან განსხვავებულიც, მივიღებთ პირდაპირ წინააღმდეგობას. ამ ორ მოთხოვნილების გაერთიანება უნდა მოხდეს უმაღლეს საფუძველზე ასვლით, გარკვეულ დიალექტიკურ განვითარების საშუალებით. აქ ჩვენ გვშველის სწორედ ცვლადი სიდიდის, ჩვენს შემთხვევაში უსასრულოდ მცირის, განხილვა.

ავიღოთ რაიმე ისეთი უსასრულოდ მცირე Δx, რომელიც ნულისაგან განსხვავებულ მნიშვნელობებს გაივლის, მაგალითად $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ ერთი მხრით Δx-ზე გაყოფა და, მაშასადამე, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-ის

შედგენა ჩვენ შეგვიძლია, რადგან Δx-ის ყოველი მნიშვნელობა ნულისაგან განსხვავებულია; მეორეს მხრით, რაგინდ მცირე სიდიდე ავიღოთ, Δx თავის ცვალების პროცესში თავის სიმცირის მხრივ მას გადააჭარბებს, ისე რომ თავიდან აცილებული იქნება ის სიძნელე, რომელიც დაკავშირებულია ამათუიმ ცალკეულ, თუგინდ ძალიან მცირე, რიცხვზე შეჩერებასთან. ამგვარად, უსასრულოდ მცირის, როგორც გარკვეულ სახის ცვლადის, ცნებაში დიალექტიკურად გაერთიანებულია ის, რისი გაერთიანება ცალკეულ რიცხვის ფარგლებში არ შეიძლება.

თითონ საკითხის დაყენების მიხედვით ჩვენ Δx-თვის გვჭირდება ნულისაგან განსხვავებული სიდიდე, ისე რომ აქ ხდება ერთგვარი უარყოფა ნულისა. მაგრამ ჩვენ არ დაგვაკმაყოფილებს ესათუის ნულისაგან განსხვავებული სიდიდე, რადგან ამ გზით მხოლოდ მიახლოვებით მნიშვნელობებს მივიღებთ. ეხლა ჩვენ ერთგვარად უარვყოფთ ნულისაგან განსხვავებულ ამათუიმ ცალკეულ მნიშვნელობით დაკმაყოფილებას და ვღებულობთ უკვე უსასრულოდ მცირეს. ამგვარად, ნულის ორმაგი უარყოფის საშუალებით ჩვენ იმავე ნულს კი არ ვღებულობთ, არამედ შინაარსით უფრო მდიდარ ცნებას, გარკვეულ სახის ცვლად სიდიდეს, სახელდობრ უსასრულოდ მცირეს. პრობლემის გადაწყვეტა ხდება აქ, ამგვარად, გარკვეულ დიალექტიკურ განვითარების საშუალებით.

უსასრულოდ მცირე, როგორც აღვნიშნეთ, გარკვეულ სახის ცვლად სიდიდეს წარმოადგენს. უსასრულოდ მცირე თვით ამ ცვლად სიდიდეში უნდა ვეძებოთ და არა მის ცალკეულ მნიშვნელობებში. თუ ავიღებთ, მაგალითად, ცვლადს $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, მთელი ეს ცვლადია უსასრულოდ მცირე და არა მისი ცალკეული მნიშვნელობანი. არცერთი მისი ცალკეული მნიშვნელობა ვერ გახდება ყოველ აღებულ რიცხვზე, კერძოდ თავისთავზე, ნაკლები. მთელი ცვლადისათვის კი შეგვიძლია ყოველ დადებით ε რიცხვისათვის მისი ისეთი მნიშვნელობა მოვნახოთ, დაწყებული რომლიდანაც ცვლადი აღებულ რიცხვზე ნაკლებია. თუ ε-ად ავიღებთ $\frac{1}{100}$, სათანადო უტოლობა განხორციელდება დაწყებული ცვლადის მნიშვნელობიდან $\frac{1}{101}$, თუ $\varepsilon=\frac{1}{101}$, დაგვჭირდება უკვე ცდა $\frac{1}{102}$-მდე და ა. შ.

უსასრულოდ მცირე, როგორც ვთქვით, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ ცვლადის არცერთი ცალკეული მნიშვნელობა არ იქნება. უსასრულოდ მცირეს ვერ ვეძებთ ამ ცვლადის უკანასკნელ მნიშვნელობის სახითაც, რადგან ასეთი უკანასკნელი მნიშვნელობა არ გვაქვს. უსასრულოდ მცირე იქნება სწორედ თითონ ჩვენი ცვლადი. უსასრულოდ მცირე სწორედ იქ უნდა ვეძებოთ, სადაც ის არის, და თუ მას იქ ვერ ვნახავთ, სადაც ის არც უნდა იყოს, ეს იმას არ ნიშნავს, რომ ის არ არის თავის ადგილასაც.

ვინც უსასრულოდ მცირის ცნების კრიტიკის მიზნით იტყვის: მე ვცნობ ყოველ ცალკეულ რიცხვს: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, მაგრამ ყოველი მათგანი სასრულოა, ხოლო უსასრულოდ მცირეს მე ვერ ვხედავ, შეიძლება ასეთი პასუხი მიიღოს: შეუძლებელია ყ ვ ე ლ ა ცალკეული რიცხვი: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ სცნოთ, ხოლო მათი სიმრავლე უარყოთ, და უსასრულოდ მცირე სწორედ ამ სიმრავლესთან არის დაკავშირებული. უსასრულოდ მცირის ცნების წინააღმდეგ მიმართული ეს კრიტიკა მსგავსი იქნებოდა უსასრულობის ცნების წინააღმდეგ მიმართულ ასეთ კრიტიკისა: წკრივის $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ ყოველი რიცხვი სასრულოა, უსასრულობა არსად არ გვაქვს და მხოლოდ სასრულო არსებობს. ნამდვილად ვინც ყველა რიცხვებს $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ სცნობს, სწორედ ამითვე სცნობს მათ უსასრულო სიმრავლეს (შეად. გვ. 102 ციტირებული ადგილი ენგელსის «ბუნების დიალექტიკიდან»). უსასრულობა უნდა ვეძებოთ იქ, სადაც ის ნამდვილად არსებობს, ჩვენს შემთხვევაში თვით $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ სიმრავლის სახით, და არა ამ სიმრავლის არარსებულ უკანასკნელ რიცხვის სახით.

წარმოებულის ცნება მათემატიკური ანალიზის ერთერთი ძირითადი ცნებაა. მისი საშუალებით წყდება მრავალი მნიშვნელოვანი საკითხი ფუნქციის ხასიათის და მისი ყოფაქცევის შესახებ. ამისათვის, რასაკვირველია, წარმოებულის უბრალო განმარტების გარდა, საჭიროა გარკვეულ ღრმა კავშირის დამყარება ფუნქციასა და მის წარმოებულს შორის. თითონ წარმოებულის განმარტება ამ კავშირს ბუნებრივად ხდის, მაგრამ თვით წარმოებულის უშუალო განმარტებით ის ჯერ კიდევ არ არის განხორციელებული. მართალია, წარმოებულის ცნების განმარტებაში აღებული ფუნქციის ცნება მონაწილეობს,

დაკავშირებით ფუნქციის ნაზრდის და ა. შ. განხილვასთან, მაგრამ ეს თვით წარმოებულის ცნების შედგენას შეეხება და არა ამ ცნების დამოკიდებულებას აღებულ ფუნქციის ცნებასთან.

საკითხი ეხლა სწორედ იმას შეეხება, თუ როგორი დამოკიდებულებაა, ერთის მხრით, აღებულ ფუნქციას, ხოლო, მეორეს მხრით, წარმოებულს ე. ი. მისი და არგუმენტის ნაზრდების ზღვარს შორის. ამ კავშირის დამყარება იწყება მთელ რიგ დებულებათა საშუალებით, რომელთა შორის პირველი ადგილი როლის თეორემას უკავია. ეს თეორემა შეიძლება მიჩნეული იყოს დიფერენციალურ აღრიცხვის ცენტრალურ დებულებად.

5. დიფერენციალი

წარმოებულის ცნება განსაზღვრული იყო, როგორც ფუნქციის და არგუმენტის ნაზრდების შეფარდების ზღვარი, და ამის შემდეგ უკვე გვიანაა საკითხის დასმა იმის შესახებ, რომ წარმოებულის განსაზღვრა შევცვალოთ ან ის ზღვრის ცნებისაგან გავანთავისუფლოთ და ა. შ. იმის შემდეგ, რაც წარმოებული განსაზღვრულია, მის განსაზღვრაზე უკვე საკითხი არ დგას. მაგრამ შეიძლება, ვთქვათ, დაისვას საკითხი იმის შესახებ, რომ წარმოებულისათვის გარკვეული ახალი გამოსახულებები მოვძებნოთ. მაგალითად, შეგვიძლია დავსვათ საკითხი იმის შესახებ, რომ წარმოებული გარკვეულ შეფარდების სახით გამოვთქვათ. ეს იქნება, რასაკვირველია, არა წარმოებულის განმარტების უკანა რიცხვით შესწორება, წარმოებულის გადაკეთება შეფარდების ზღვრიდან შეფარდებად, არამედ წარმოებულის, ანუ სათანადო შეფარდების ზღვრის, შესახებ გარკვეული ახალი საკითხის დასმა, რომელშიაც წარმოებულის განმარტება უკვე ნაგულისხმევია. დასმულ საკითხთან დაკავშირებით შეიძლება დიფერენციალის ცნებაზე გადავიდეთ.

დიფერენციალი რაიმე $y=f(x)$ ფუნქციისა — ეს დიფერენციალი აღინიშნება dy-ით — განმარტებულია როგორც $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის ნამრავლი რაიმე ნამდვილ რიცხვზე, რომელიც Δx-ით აღვნიშნოთ: $dy=f'(x)\Delta x$. დიფერენციალის განმარტებაში, ამგვარად, წარმოებულის ცნებაა ნაგულისხმევი. დიფერენციალი $f'(x)\Delta x$ იქნება ორი დამოუკიდებელი ცვლადის x-ის და Δx-ის ფუნქცია. შეიძლება როგორც წარმოებულის ისე დიფერენციალის მარტივი გეომეტრიული ინტერპრეტაციის მოხდენა: წარმოებული იქნება ტან-

გენსი იმ კუთხისა, რომელსაც x-ის აღებულ მნიშვნელობის შესაბამის მრუდის წერტილზე გავლებული მხები შეადგენს x ღერძის დადებით გეზთან, ხოლო დიფერენციალი — ამ მხების ნაზრდი, როცა x წერტილიდან $x+\Delta x$ წერტილზე გადავალთ ($x+\Delta x$ წერტილი რომ $f(x)$ ფუნქციის არგუმენტის ცვალების ფარგლებს გარეთ მოხვდეს, აღებულ წერტილზე გავლებულ მხების მიმართ ეს მაინც არ მოხდება, რადგან ამ მხების აბსცისს შეუძლია მიიღოს ყოველგვარი ნამდვილი რიცხვის მნიშვნელობა).

ტოლობა $dy=f'(x)\Delta x$ შეიძლება ასეთნაირად გადიწეროს: $f'(x)=\frac{dy}{\Delta x}$. ეს წარმოებულის ახალი განმარტება კი არ არის დიფერენციალის საშუალებით, — პირიქით, თვით დიფერენციალი არის განმარტებული წარმოებულის საშუალებით და დიფერენციალის შემოყვანის დროს წარმოებულის ცნება უკვე ნაგულისხმევია — აქ მხოლოდ მოცემულია წარმოებულის ახალი გამოსახულება. ამით ჩვენ წარმოებული შეფარდების ზღვრის ნაცვლად შეფარდებად კი არ გავხადეთ, არამედ, პირიქით, ვისარგებლეთ წარმოებულის ცნებით, როგორც ფუნქციისა და არგუმენტის ნაზრდების შეფარდების ზღვრისა, და შევადგინეთ ახალი შეფარდება, რომელიც წარმოებულის ტოლი იქნება.

თუ ავიღებთ ეხლა ფუნქციას $y=x$, მისი დიფერენციალი, რომელიც dx-ით აღვნიშნოთ, ტოლი იქნება Δx-ის, რადგან ამ ფუნქციის წარმოებული 1-ის ტოლია. dx-ს უწოდებენ დამოუკიდებელ x ცვლადის დიფერენციალს, მაგრამ თვით დიფერენციალის ცნების მიხედვით შეიძლება ლაპარაკი მხოლოდ ფუნქციის დიფერენციალის შესახებ, და dx ნამდვილად არის იმ ფუნქციის დიფერენციალი, რომლისათვისაც დამოკიდებული ცვლადის მნიშვნელობანი დამოუკიდებელ ცვლადის მნიშვნელობების ტოლია. $dy=f'(x)\Delta x$ და $f'(x)=\frac{dy}{\Delta x}$ ნაცვლად შეგვიძლია ეხლა დავწეროთ ტოლობანი $dy=f'(x)dx$ და $f'(x)=\frac{dy}{dx}$.

ჩვენ არ უნდა აურიოთ ერთიმეორეს ის Δx, რომელიც წარმოებულის განსაზღვრაშია:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

იმ Δx ან dx, რომელიც გვაქვს, მაგალითად, ფორმულაში

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

Δx წარმოებულის განსაზღვრაში არის დამოუკიდებელ ცვლადის უსასრულოდ მცირე ნაზრდი; ის თვით წარმოებულის განსაზღვრას ემსახურება. Δx ან dx ფორმულებში $dy=f'(x)\,dx$ და

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

არის ცვლადი, რომელიც, საზოგადოთ, წარმოადგენს ნებსით ნამდვილ რიცხვს, და ის განიხილება წარმოებულის შემოყვანის მიზნისათვის კი არა, არამედ ამ შემთხვევაში წარმოებულის შემოყვანის შემდეგ, მისი გვერდით ახალი ცნების — დიფერენციალის შესადგენად.

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

წარმოებულის განსაზღვრას კი არ ემსახურება და

$$f'(x)=\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}\text{-ს}$$

კი არ იმეორებს ახალი სახით, არამედ არის ფორმულა, რომელსაც დავწერთ უკვე წარმოებულის შემოყვანის შემდეგ. $f'(x)=\frac{dy}{dx}$-ს არ უნდა უყუროთ, როგორც $f'(x)=\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}$-ის სტილიზირებულ ჩანაწერს ანდა შეფარდების $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ზღვარის ამ შეფარდების მრიცხველზე და მნიშვნელზე გავრცელების შედეგს. Δx და Δy-ის ზღვრები იქნება ნულები და არა dx და dy, და, Δx და Δy-ის ზღვრების შეფარდება რომ გაგვეხილა, მივიღებდით განუზღვრელობას $\frac{0}{0}$. ამავე დროს ამ განუზღვრელობისაკენ სრულებით არ მიგვიყვანს $\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}$-ის განხილვა, რადგან სწორედ იმის გამო, რომ მნიშვნელის ზღვარი ნულია, არ შეიძლება სათანადო დებულების გამოყენება შეფარდების ზღვრის შესახებ. საჭიროა კარგად გავითვალისწინოთ ფორმულებს შორის:

$$f'(x)=\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}\text{ და }f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

განსხვავება, რომელიც ერთგვარად შენიღბულია, კერძოთ, ჩანაწერების ერთნაირი გარეგნული მსგავსებით.

ეხლა სრულებით ბუნებრივად დაისმება საკითხი: რა საჭიროა წარმოებულის ცნების გვერდით შემოვიყვანოთ ახალი ცნება დიფერენციალისა, რომელიც შინაარსობრივად საკმაოდ ღარიბია და წარმოებულის ცნებისაგან განსხვავდება მხოლოდ მამრავლით Δx? ხომ არ ქმნის ერთნაირ პარალელიზმს — წარმოებულის ჩვეულებრივ გამოსახულების $f'(x)$ გვერდით მიმართვა მისი გამოსახულებისადმი დიფერენციალების საშუალებით, მით უფრო, რომ აქ განსხვავება მხოლოდ იმასშია, რომ მრიცხველში და მნიშვნელში მიწერილია მამრავლები Δx და ნაცვლად $f'(x)$ დაწერილია $\frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x}$?

ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად საჭიროა მიუთითოთ დიფერენციალის გარკვეულ ფორმალურ უპირატესობებზე შედარებით წარმოებულთან. ამისათვის დავსვათ საკითხი თუნდაც რთული ფუნქციის წარმოებულის და დიფერენციალის შესახებ.

თუ გვაქვს ორი ფუნქცია $y=f(v)$ და $u=\varphi(x)$, მათი საშუალებით შეგვიძლია ახალი ფუნქცია შევადგინოთ ასეთნაირად. x ცვლადის აღებულ მნიშვნელობისათვის გვაქვს დამოკიდებულ u ცვლადის გარკვეული მნიშვნელობა. ეხლა დამოუკიდებელ v ცვლადს ფუნქციაში $f(v)$ შეგვიძლია მივცეთ u-ს მიღებული მნიშვნელობა: მაშინ გვექნება y-ის შესაბამისი მნიშვნელობა. ამგვარად, x-ის ამათუიმ მნიშვნელობისათვის ჩვენ მივიღეთ y-ის შესაბამისი მნიშვნელობა და შევადგინეთ ახალი ფუნქცია, რომელსაც ვუწოდებთ $y=f(v)$ და $u=\varphi(x)$ ფუნქციების საშუალებით შედგენილ რთულ ფუნქციას.

ეხლა, იმის თვალსაჩინოთ გამოსათქმელად, რომ $y=f(v)$ ფუნქციის დამოუკიდებელ v ცვლადს იმ მნიშვნელობებს ვანიჭებთ, რასაც $u=\varphi(x)$ ფუნქციის დამოკიდებული u ცვლადი ღებულობს, შეგვიძლია ერთიდაიგივე აღნიშვნა ვიხმაროთ როგორც u ისე v-თვის, მაგალითად u, რთული ფუნქცია ასე წარმოვადგინოთ $u=f(u)$, $u=\varphi(x)$, და ვილაპარაკოთ, რომ u სახით ჩვენ გვაქვს ერთგვარად «დამხმარე ცვლადი». მაგრამ ასეთი გამოთქმა პირდაპირი მნიშვნელობით არ უნდა გავიგოთ, და არ უნდა ვიფიქროთ, რომ, მაგ., $y=f(v)$ ფუნქციაში v სავსებით დამოუკიდებელი ცვლადი არაა. პირიქით, სწორედ იმის გამო, რომ v დამოუკიდებელი ცვლადია, მას შეგვიძლია მივცეთ ესათუის მნიშვნელობა და, კერძოთ, ის მნიშვნელობა-

ნიც, რომელსაც $u=\varphi(x)$ ფუნქცია ღებულობს (თუ, რასაკვირველია, ამ ფუნქციის მნიშვნელობანი არ გამოდიან v-ს ცვალების ფარგლებიდან). დამოუკიდებელ ცვლადისათვის ამათუიმ მნიშვნელობის მიცემა ლოგიკურად არ აუქმებს მას, როგორც დამოუკიდებელ ცვლადს. პირიქით, ეს სწორედ იმის საფუძველზე ხდება, რომ დამოუკიდებელ ცვლადთან გვაქვს საქმე, რომელიც, რასაკვირველია, თავის მნიშვნელობათა გარეშე არ არსებობს. ცვლადის ამათუიმ მნიშვნელობის აღება არ ნიშნავს, რომ სხვა მნიშვნელობანი გაუქმებულია.

საქმე ისეთნაირად არ უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ დამოუკიდებელ და დამოკიდებულ ცვლადების ცნებების გვერდით არის ახალი ცნება «დამხმარე ცვლადისა», რომელსაც მათ შორის საშუალო ადგილი უკავია. $u=\varphi(x)$ ფუნქციაში u არის დამოკიდებული ცვლადი და $y=f(v)$ ფუნქციაში v — დამოუკიდებელი ცვლადი და ამასთანავე არის ის, რომ v დამოუკიდებელ ცვლადს იმ მნიშვნელობებს ვაძლევთ, რასაც u დამოკიდებული ცვლადი ღებულობს (სწორედ ამ გარემოების აღსანიშნავად პირობით ვხმარობთ ტერმინს «დამხმარე ცვლადი»), და საქმე ისეთნაირად არ უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ გვაქვს რაღაც «დამხმარე ცვლადი», რომელიც $y=f(u)$ ფუნქციაში თამაშობს როლს დამოუკიდებელი, ხოლო $u=\varphi(x)$ — დამოკიდებული ცვლადისა, ანდა წარმოადგენს ერთნაირ შუა ინსტანციას, რომელიც აკავშირებს ერთი მეორეს პირველ ფუნქციის დამოკიდებულ და მეორის დამოუკიდებელ ცვლადს.

სათანადო ერთიდაიგივეობა იმასში კი არ მდგომარეობს, რომ საერთო შუამავალი გვყავს, არამედ იმასში, რომ პირველი ფუნქციის დამოკიდებულ ცვლადს იმავე მნიშვნელობებს ვაძლევთ, რასაც ღებულობს მეორე ფუნქციის დამოკიდებული ცვლადი. თუ ჩვენ გვესმის ის პირობითი მნიშვნელობა, რომლითაც იხმარება ტერმინი: «დამხმარე ცვლადი», ამ ტერმინის გამოყენება, რასაკვირველია, სრულებით არ იქნება სახიფათო. რთული ფუნქცია $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ შემოკლებულად ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ: $y=f(\varphi(x))$.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ რთული ფუნქციის $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ წარმოებული ტოლია $f(u)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების წარმოებულების ნამრავლის: $f'(u)\varphi'(x)$. ამგვარად, ამ შემთხვევაში წარმოებულის გამოსახულება განსხვავებულია იმ შემთხვევისაგან, როცა გვაქვს უბრალოდ ფუნქცია $y=f(u)$. თუ ორ ოპერაციას ავიღებთ: u-ს ნაცვლად $\varphi(x)$ ფუნქციის ჩასმას და გაწარმოებას, ამ ორი ოპერაციის შედეგი იქნება დამოკიდებული იმ რიგისაგან, რომლითაც

ამ ორ ოპერაციას ერთი მეორის მიყოლებით შევასრულებთ. თუ ჯერ გავაწარმოებთ, ე. ი. მოგვიხდება გაწარმოება ფუნქციისა $y=f(u)$ და მერე მოვახდენთ ჩასმას, მივიღებთ $f'(\varphi(x))$. თუ კი ჯერ ჩავსვამთ ე. ი. უკვე საქმე გვექნება რთულ ფუნქციასთან $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ და მერე გავაწარმოებთ, მივიღებთ $f'(\varphi(x))\varphi'(x)$.

ვნახოთ ეხლა როგორი მდგომარეობა გვექნება დიფერენციალისათვის? მოვძებნოთ რთული ფუნქციის $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ დიფერენციალი. ამ ფუნქციის წარმოებული იქნება $f'(u)\varphi'(x)$. ამიტომ დიფერენციალის მისაღებად ის უნდა გავამრავლოთ დამოუკიდებელ ცვლადის, ამ შემთხვევაში x-ის, დიფერენციალზე. მივიღებთ $dy=f(u)\varphi'(x)\,dx$. მაგრამ $\varphi'(x)\,dx$ არის $u=\varphi(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი. ამგვარად, $dy=f'(u)\,du$.

ჩვენ ვხედავთ, რომ რთული ფუნქციის დიფერენციალი ისევე გამოისახება, როგორც იმ შემთხვევაში, როცა გვაქვს მხოლოდ ფუნქცია $y=f(u)$. იმ დროს, როცა წარმოებულის გამოსახულება დამოკიდებულია იმაზე, ვიღებთ უბრალოდ ფუნქციას $y=f(u)$ თუ რთულ ფუნქციას $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, დიფერენციალის გამოსახულება ორივე შემთხვევაში ერთიდაიგივეა: $dy=f'(u)\,du$. თუ გვაქვს ორი ოპერაცია: u-ს ნაცვლად $\varphi(x)$ ფუნქციის ჩასმა და დიფერენციალის აღება, ამ ორი ოპერაციის შესრულების შედეგი არ არის დამოკიდებული იმ რიგისაგან, რომლითაც ამ ორ ოპერაციას ერთი მეორეს მიყოლებით ვასრულებთ. ორივე შემთხვევაში მივიღებთ $f'(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$.

ზემოთაღნიშნულ გარემოების გამოსათქმელად ჩვენ კიდევ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ დიფერენციალის გამოსახულება არის ინვარიანტული იმის მიმართ, ვიღებთ დიფერენციალს დამოუკიდებელ თუ დამხმარე ცვლადის მიმართ. წარმოებულს კი ასეთი ინვარიანტობა არ ახასიათებს.

უკვე აქ მჟღავნდება დიფერენციალის გარკვეული ფორმალური უპირატესობანი შედარებით წარმოებულთან. სათანადო საანგარიშო აპარატის ერთერთ ღირსებას წარმოადგენს მისი ერთნაირი სიმტკიცე, ფორმალური სქემის შეუცვლელობა გარკვეულ შედარებით ფართო ფარგლებში შინაარსობრივი ხასიათის ვარიაციის პირობებში. სასურველია, რომ ფორმალურ აპარატის გამოყენება შესაძლებელი იყოს საქმის შინაარსობრივი მხარის მეტად შეზღუდულ ცოდნის პირობებში, ისე რომ ცოდნის სათანადო გაფართოვება სათანადო ფორმალური სქემის გამოყენებას პირველად კი არ ხდიდეს

შესაძლებლად, არამედ არკვევდეს უკვე გამოყენებული სქემის კონკრეტულ წაკითხვის ხასიათს. მაგალითად, თუ გვაქვს ფუნქცია $y = f(u)$ და არ ვიცით შევჩერდებით საბოლოოდ u ცვლადზე, თუ u-ს განვიხილავთ, როგორც სხვა ცვლადის ფუნქციას, მაშინ ჯერ ვერ დავწერთ წარმოებულის გამოსახულებას და უნდა ვუცადოთ ამ საკითხის გამორკვევას. დიფერენციალის დასაწერად კი ჩვენ ამის ცდა არ დაგვჭირდება. დავწერთ გამოსახულებას $f'(u)\,du$ და შემდეგ, იმისდამიხედვით, თუ როგორი მდგომარეობა გამოირკვევა — შევჩერდებით u ცვლადზე თუ u-ს განვიხილავთ, როგორც სხვა ცვლადის ფუნქციას, ჩანაწერს სათანადოთ წავიკითხავთ — პირველ შემთხვევაში du-ს წავიკითხავთ, როგორც დამოუკიდებელ ცვლადის დიფერენციალს, ხოლო მეორე შემთხვევაში, როგორც გარკვეულ ფუნქციის დიფერენციალს. მაგრამ საგულისხმო ისაა, რომ ფორმალურად ჩანაწერი ერთიდაიგივე იქნება და ამ ჩანაწერის ადრევე გაკეთება შეგვიძლია.

დიფერენციალის ცნებას ახასიათებს ინვარიანტობა არა მარტო ზემოთგანხილულ მიმართულებით, არამედ სხვა მხრივაც. ამ ინვარიანტობასთან დაკავშირებით, როგორც აღვნიშნეთ, მჟღავნდება გარკვეული ფორმალური უპირატესობა დიფერენციალის ცნებისა, შედარებით წარმოებულის ცნებასთან.

დიფერენციალის ცნება თავის შინაარსის მხრივ მაინცდამაინც მდიდარი არაა, მაგრამ მაინც ეს გარკვეული ცნებაა და ამ ცნების მნიშვნელობა, უმთავრესად, მის ფორმალურ უპირატესობებთან დაკავშირებულია. ეს ფორმალური უპირატესობანი დიფერენციალის ცნებას შეეხება, როგორც ასეთს, და არა იმ ნიშნაკებს, რომელნიც გამოყენებულია მის აღსანიშნავად. ჩვენ შემდეგ, მარქსის კონცეპციის განხილვასთან დაკავშირებით, უფრო დაწვრილებით შევეხებით აქ დასმულ საკითხს.

II

უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დაფუძნების განვითარების ეტაპები

1. ლეიბნიცი

მათემატიკური ანალიზის თანამედროვე დაფუძნება წარმოადგენს ხანგრძლივი განვითარების შედეგს. ეს ნათლად გამოჩნდება თუნდაც ამ დაფუძნების თეორიის ხასიათის გათვალისწინებით. საჭირო იყო

შემუშავება ნამდვილ რიცხვთა მკაცრი არითმეტიკული თეორიის, რომ შესაძლებელი ყოფილიყო მის საფუძველზე ზღვართა თეორიისათვის ლოგიკურად დამაკმაყოფილებელი ხასიათის მიცემა და ამ უკანასკნელ თეორიასთან დაკავშირებით სათანადო დახასიათება მათემატიკური ანალიზის მთელი რიგი ძირითადი ცნებების. უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის შექმნის პერიოდში და მისი განვითარების პირველ ხანებში ჩვენ, მართალია, ვხვდებით იმ ძირითად ცნებებს, რომელთანაც დღესაც გვაქვს საქმე: ზღვრის, უსასრულოდ მცირის, წარმოებულის, ინტეგრალის და სხვა, მაგრამ ამ ცნებების მდგომარეობა მათი ლოგიკური დაფუძნების მხრივ ძალიან ცუდია. მაგალითად, ზღვრის ცნება, რომელსაც წინ არ უძღვის ნამდვილ რიცხვთა არითმეტიკული თეორია, ღებულობს უსასრულობის მიღმა მყოფ საფეხურის ხასიათს, რომელსაც შეიძლება მივაღწიოთ მხოლოდ იმის შემდეგ, რაც ცვლადთან ერთად მთელ მის უსასრულო გზას გავივლით. ამგვარი მიდგომის შიხედვით ზღვარი ისეთი საფეხურია, რომლითაც უნდა დამთავრდეს სათანადო დაუსრულებელი პროცესი, რომელიც ამიტომ ლოგიკურად მიუღწეველია და რომლის მიმართ შეიძლება მხოლოდ ესათუის მიახლოვება.

ასეთ პირობებში, მაგალითად, უსასრულოდ მცირე წარმოგვიდგება, როგორც გაქრობის გზაზე მდგომ სიდიდის მდგომარეობა თვით გაქრობის მომენტში, ანდა სიდიდის მდგომარეობა მისი ჩასახვის მომენტში, სანამ ის ჯერ კიდევ მოასწრებს ჩამოყალიბებას, როგორც გარკვეული სიდიდე. ეს არის სიდიდე, ასე ვთქვათ, გამჭვირვალე მდგომარეობაში, როცა ის ჯერ კიდევ ნულს არ გასცილებია, მაგრამ იმავე დროს მთლად უბრალო ნულის მდგომარეობაში არ არის. ამ შემთხვევაში უსასრულოდ მცირე წარმოუდგენიათ არა როგორც გარკვეული სახის ცვლადი, დაკავშირებული რიცხვთა სათანადო სიმრავლესთან, არამედ როგორც გარკვეული ფიქსირებული საფეხური, როგორც ერთერთი ოდენობითი, თუმცაღა საწყისი ან ბოლო, მნიშვნელობა სხვა ოდენობით მნიშვნელობათა შორის. უსასრულოდ მცირის შესახებ ამგვარი წარმოდგენის აღსანიშნავად შეიძლება გამოყენებული იყოს გამოთქმა: აქტუალური უსასრულოდ მცირე. როცა უსასრულოდ მცირე სიდიდე პირდაპირი მნიშვნელობით წარმოუდგენიათ, როგორც გარკვეული, ფიქსირებული სიდიდე, საქმე აქვთ სწორედ აქტუალურ უსასრულოდ მცირესთან.

არსებითად ამგვარი ხასიათი აქვს უსასრულოდ მცირის ცნებას უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის შემქმნელებისათვის — ნიუტონის

და ლეიბნიცისათვის. ჩვენ უფრო დაწვრილებით შევჩერდებით ლეიბნიცზე, რადგან, მისი თვალსაზრისის სათანადო თავისებურებების გამო, ამ თვალსაზრისის განხილვის მაგალითზე შეიძლება უკეთ იყოს გამოვლენილი ჩვენთვის საინტერესო გარემოებანი.

საქმე ისეთნაირად არ უნდა წარმოვიდგინოთ, ვითომდაც ლეიბნიცისათვის სრულებით შეუმჩნეველი იყოს აქტუალური უსასრულოდ მცირის ცნებასთან დაკავშირებული სიძნელეები. მაგრამ თითონ ხასიათი მისი თეორიის ისეთია, რომ მას ძალაუნებურად უხდება უსასრულოდ მცირე წარმოიდგინოს როგორც გარკვეული ფიქსირებული სიდიდე.

ლეიბნიცი იძლევა სხვადასხვაგვარ დახასიათებას უსასრულოდ მცირის ცნებისა. ჩვენ ზემოთ მოვიყვანეთ მისი დისკუსია იოჰან ბერნულისთან, რომელშიაც ბერნული ანვითარებს აქტუალურ უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისს, ლეიბნიცი კი ამ თვალსაზრისს აკრიტიკებს. მაგრამ ლეიბნიცისათვის უფრო დამახასიათებელია სხვა გამოთქმები და კიდევ უფრო მეტად — მისი თეორიის აგებულებასთან დაკავშირებული სათანადო გარემოებანი, რომლებშიაც გამოვლინებულია აქტუალური უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისი.

თვით ლეიბნიცის რყევა უსასრულოდ მცირის ცნების დახასიათებისას ამჟღავნებს აქტუალურ უსასრულოდ მცირესთან და სათანადო თვალსაზრისის გატარებასთან დაკავშირებულ ობიექტურად არსებულ სიძნელეებს და არა ლეიბნიცის მიერ ამ თვალსაზრისის, ზოგჯერ მაინც, შინაგანი დაძლევის გამოვლინებაა.

ლეიბნიცის მათემატიკურ კონცეპციაში ახლობელ თუ შორეულ გამოხმაურებას ჰპოულობს მისი ფილოსოფიის სირთულე, სხვადასხვა მოტივები, რომლებსაც ამ ფილოსოფიაში ვხვდებით და მასთან დაკავშირებული სიძნელეები. ჩვენ ამოცანას არ წარმოადგენს ამ საკითხის დაწვრილებითი გარჩევა და მას მხოლოდ გაკვრით შევეხებით მის ზოგიერთ მთავარ პუნქტებში.

ლეიბნიცთან მოიპოვება მრავალი ადგილები, რომელნიც ტიპიურია აქტუალური უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისისათვის, თუნდაც ასეთი: «მხების მონახვა იგივეა, რაც სწორის გაყვანა, რომელიც აერთებს მრუდის ორ უსასრულოდ ახლო წერტილს, ანუ სწორის, რომელიც წარმოადგენს ამ მრუდის ექვივალენტურ უსასრულო კუთხიან მრავალკუთხედის გაგრძელებულ მხარეს». უსასრულოდ მცირეებს ლეიბნიცი განიხილავს, როგორც ისეთ სიდიდეებს, რომელნიც ყოველ სასრულო სიდიდეზე ნაკლებია, და პირდაპირ ნულები არ

არის, მაგრამ სასრულო სიდიდეებთან «შეუდარებელია», ე. ი. რაგინდ დიდი რაოდენობით დაგროვებული და რაგინდ დიდ რიცხვზე გამრავლებული სასრულო სიდიდეს მაინც არ მოგვცემს.

ზოგ ადგილას ლეიბნიცთან ისეთ მიდგომას ვხვდებით, რომ უსასრულოდ მცირე უნდა განვიხილოთ არა როგორც რეალურად არსებული რამ, არამედ მხოლოდ როგორც წმინდა ლოგიკური ხასიათის წარმონაქმნი. ლეიბნიცი ლაპარაკობდა უსასრულოდ მცირეებზე, როგორც იდეალურ საგნებზე და ცნებებზე, როგორც ევრისტულად მოხერხებულ ფიქციებზე, რომლების გამოყენების შედეგები შეიძლება, თუ უნდათ, მიღებული იყოს მკაცრი გზით ამოწურვის მეთოდის გამოყენებით: «უსასრულოდ მცირენი..., — ამბობს ის [1], — თუმცა ფიქციებია, მაგრამ სასარგებლო იმისათვის, რომ ვიანგარიშოთ მოკლედ და სწორად».

ლეიბნიცისათვის არსებით როლს სხვადასხვა შედეგების მისაღებად თამაშობს უსასრულოდ მცირეების უკუგდება შედარებით სასრულო სიდიდეებთან, ან უმაღლეს რიგის უსასრულოდ მცირეების შედარებით აღებულ უსასრულოდ მცირეებთან. «მე ვფიქრობ, — ამბობს ის, — რომ ტოლია არა მარტო ისეთი სიდიდეები, რომელთა სხვაობა საზოგადოთ ნულის ტოლია, არამედ აგრეთვე ისეთებიც, რომლების სხვაობა შეუდარებლად მცირეა» [2]. ამ გარემოებაში კვლავ მჟღავნდება აქტუალური უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისი. ამგვარ შეხედულებათა დასახასიათებლად ჰეგელი მოხდენილად ამბობს [3], რომ «უსასრულოდ მცირე სხვაობა გამოდის როგორც ერთგვარად განსხვავების განუმტკიცებლობა (das Schweben eines Unterschieds)». უსასრულოდ მცირის ცნების შინაარსთან დაკავშირებულ სათანადო სიძნელეების შესახებ ლეიბნიცი აღნიშნავდა, რომ კამათი ამ მხრივ გამოდის მათემატიკის ფარგლებიდან და გადადის მეტაფიზიკურ შეხედულებათა სფეროში განუწყვეტლობის პრინციპის შესახებ.

უსასრულოდ მცირის ცნების წამოწევა დაკავშირებულია განუწყვეტლობის პრინციპთან, რომელიც ლეიბნიცის ფილოსოფიის ერთ-

---

[1] იხ. Baumann. Die Lehre von Raum, Zeit und Mathematik, B. II 1869, S. 50. ამ შრომის მნიშვნელოვანი ნაწილი ლეიბნიცს შეეხება და მასში შეკრებილია და დალაგებული სხვადასხვა საკითხების მიხედვით ადგილები ლეიბნიცის ნაშრომებიდან, მიძღვნილი მათემატიკასთან დაკავშირებულ ფილოსოფიურ პრობლემებისადმი.

[2] Baumann, 50.

[3] Гегель. Сочинения, т. V, 1937, стр. 309.

ერთი ძირითადი პრინციპია. «არაფერი არ ხდება ერთბაშად, — ამბობს ლეიბნიცი[1], — და ერთერთი ჩემი ძირითადი და ყველაზე უდავო დებულებათაგანი არის ის, რომ ბუნება არასდროს ნახტომებს არ აკეთებს. მე ვუწოდე ამ კანონს განუწყვეტლობის კანონი... ამ კანონის ძალით ყოველი გადასვლა მცირედან დიდზე და პირიქით ხდება გარდამავალი საფეხურების საშუალებით, როგორც ხარისხების ისე ნაწილების მიმართ. სრულებით ასევე, მოძრაობა უშუალოთ არ ჩნდება უძრაობიდან და ის გადადის უძრაობის მდგომარეობაში მხოლოდ უფრო მცირე მოძრაობის საშუალებით, იმის მსგავსად, რომ არასდროს არ შეიძლება გაიარო რაიმე ხაზი ან სიგრძე, თუ წინასწარ არ გაივლი უფრო ნაკლებ ხაზს». განუწყვეტელობის პრინციპის ერთერთი ჩამოყალიბება ლეიბნიცთან არის შემდეგი: როცა შემთხვევები (ან ის, რაც მოცემულია) ერთი მეორეს განუწყვეტლივ უახლოვდებიან და ბოლოს ერთი მეორეში იკარგებიან, ამასვე ადგილი უნდა ჰქონდეს მათ შედეგებისათვის (ანდა იმისათვის, რაც საძიებელია)[2].

ნახტომი ბუნებაში ლეიბნიცისათვის იქნებოდა ლოგიკური ნახტომი. განუწყვეტლობის პრინციპი ლეიბნიცთან მჭიდროდ დაკავშირებულია უსასრულოდ მცირის ცნებასთან, ე. ი. ისეთი სიდიდისა, რომელიც ერთდროულად ნულია და ნულისაგან გასნხვავებული, ან, კიდევ უფრო მეტი, ასეთიც არის და იმავე დროს არც ნული და არც ნულისაგან განსხვავებული. უსასრულოდ მცირეების საშუალებით ხორციელდება გადასვლის აბსოლუტური თანდათანობა. ის, რომ უსასრულოდ მცირე ნულია, უზრუნველყოფს ამ თანდათანობას, ხოლო ამავე დროს მისი ნულისაგან განსხვავებული ხასიათი მოასწავებს გადასვლის მოხდენის შესაძლებლობას. რასაკვირველია, აქ სიძნელე შენიღბულია უსასრულოდ მცირის სამოსელში, მაგრამ განუწყვეტლობის პრინციპის კრიტიკას, დაკავშირებით აქტუალურ უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისის კრიტიკასთან, ჩვენ მოვახდენთ შემდეგ, როცა განვიხილავთ მარქსის კონცეპციას ცვლადი სიდიდის შესახებ, ჯერჯერობით კი გვაინტერესებს აღნიშვნა კავშირისა განუწყვეტლობის პრინციპსა და აქტუალური უსასრულოდ მცირის — თვით ჩასახვის ან გაქრობის მდგომარეობაში მყოფ სიდიდის — შორის.

---

[1] Лейбниц. Новые опыты о человеческом разуме, 1936, стр. 52-53.
[2] Baumann, 104.

იმ დროს, როცა თანამედროვე მათემატიკაში თვით სათანადო ცვლადის საშუალებით ხდება ზღვრის ფიქსირება, რომელიც ამგვარად მოცემული იქნება ცვლადთან ერთად და არა გადაკარგული უსასრულობაში და ლოგიკურად მოქცეული ცვლადის მნიშვნელობების შემდგომ, ლეიბნიცისათვის, და, საზოგადოთ, უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის განვითარების პირველ ხანებისათვის, დამახასიათებელია ის, რომ ცვლადის მნიშვნელობანი, ნაცვლად იმისა, რომ წარმოადგენდენ ცვლადს, როგორც ასეთს, განხილული არიან როგორც ცვლადის გასწვრივ აღებული ნაჭდევები, ამათუიმ «მიახლოვების» გამომხატველი. ლეიბნიცი მზად არის იკისროს შეცდომა, რომელსაც გამოიწვევს ცვლადის ამათუიმ მნიშვნელობაზე შეჩერება, ოღონდ იმაზე ზრუნავს, რომ შესაძლებელი იყოს ეს შეცდომა გახადო რაგინდ მცირე და ამგვარად თვით შეცდომა ერთგვარი განუწყვეტელი გზით გადავიდეს ჭეშმარიტებაში. ლეიბნიცს არ ეშინია სიდიდეების უკუგდება, რომელნიც «შეცდომას ხდის ნაკლებს, ვიდრე ყოველი აღებული რიცხვი და მაშასადამე = 0» [1] ლეიბნიცისათვის არითმეტიკული მიახლოვება მცირე განსხვავებით მოასწავებს ამასთანავე დაშვებულ შეცდომის მცირე ლოგიკურ წონას. მისთვის სიდიდის თანდათანი ცვალება არის იმავე დროს ლოგიკური განუწყვეტლობის გამომხატველი. ამასთან დაკავშირებით შეიძლება აღინიშნოს, რომ ლეიბნიცს შესაძლებლად მ ი ა ჩ ნ ი ა ტოლობა განიხილოს, როგორც ქრებადი უტოლობა [2].

არაა აგრეთვე ზედმეტი, ზემოთნათქვამთან დაკავშირებით, გავიხსენოთ ლეიბნიცის განმარტება ტოლობისა ჩასმის ოპერაციის საშუალებით, რაზედაც ჩვენ კიდევ მოგვიხდება მითითება [3].

---

[1] Baumann, 54.

[2] Baumanu, 141.

[3] როცა ლეიბნიცი ტოლობას განიხილავს როგორც უსასრულოდ მცირე განსხვავებას, საქმე სწორედ დაკავშირებული იქნება აქ ამ გ ა ნ ს ხ ვ ა ვ ე ბ უ ლ ცნებებთან ტოლობის და განსხვავების, წინასწარ მოგვიხდება ამ განსხვავების უგულებელყოფა, მისი უსასრულოდ შემცირება და ტოლობაზე მიყვანა და ა. შ... როცა ცდილობენ თითონ ლოგიკური ხასიათი განსხვავების შეარბილონ მისი რაოდენობრივი შემცირების საშუალებით, ადრე საჭირო იქნება ამის მოხდენა განსხვავების მიმართ ამ შერბილებულ განსხვავებას და ტოლობას შორის. მსგავსი მდგომარეობა გვაქვს ლეიბნიცის ცდის მიმართ—დაყვანილი იყოს ტოლობა ჩასმაზე: ადრე საჭირო იქნება გამართლებული იყოს შესაძლებლობა, იმის განხილვის ნაცვლად, რაც ტოლობის იდენტურია, ჩასმული იყოს ჩასმა, როგორც ტოლობის შემცველელი და ა. შ. (ჩასმის ცნების საშუალებით ტოლობის ცნების

განუწყვეტლობის პრინციპთან და უსასრულოდ მცირეებისადმი მიმართვასთან უშუალო კავშირშია ლეიბნიცის სწავლება სულიერ ცხოვრების განუწყვეტლობის და «მცირე წარმოდგენების» (petites perceptions) შესახებ.

უსასრულოდ მცირეები ლეიბნიცისათვის წარმოადგენს პირობას საგნების ჰარმონიისათვის. კ. ფიშერი ამგვარ ფორმულირებას იძლევა ლეიბნიცის შეხედულებისათვის[1]: მონადების სხვაობა იწვევს მათ თანაარსებობას, უსასრულოდ მცირე სხვაობები იწვევს ჰარმონიულ თანაარსებობას.

ლეიბნიცის უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის ხასიათის გაგებისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს აგრეთვე გათვალისწინებას ლეიბნიცის ფილოსოფიისათვის დამახასიათებელ ერთერთ ძირითად ხაზის, რომელიც მდგომარეობს ლოგიკის მიმართ წმინდა ფორმალისტურ მიდრეკილებაში. საზოგადოთ, აზროვნების პროცესში ლეიბნიცის მიხედვით ძირითადია მანიპულაცია სიმბოლოებზე. «ნიშნები არის ყველაფერი, — ამბობს ის[2], — რასაც ჩვენ აზროვნების დროს საგნების ადგილას ვსვამთ». ცნობილია, რომ ახალგაზრდობიდანვე ლეიბნიცი გატაცებული იყო აზრით შეექმნა ერთნაირი უნივერსალური სიმბოლიკა, რომელიც ალგებრის ენას გაავრცელებდა მთელ თეორიულ მეცნიერებაზე და მსჯელობას ერთნაირ აღრიცხვის ხასიათს მისცემდა, შეექმნა ერთნაირი მათემატიკური აპარატი თვით ლოგიკისათვის, აგრედ წოდებული კომბინატორული ხელოვნება ან უნივერსალური ქარაქტერისტიკა. ამგვარი მიდრეკილება შემდეგ, გასულ და მიმდინარე საუკუნეში, ფართოდ განვითარდა მათემატიკური ლოგიკის თეორიების შექმნის სახით.

ლეიბნიცი ფიქრობდა, რომ შეიძლება მოხერხებულიყო მთელი აზროვნების დაყვანა აღრიცხვაზე და აზრების სისწორის — ანგარიშის სისწორეზე, თუ უმარტივეს ცნებებისათვის და მათი შეერთების ხერხებისათვის მოინახებოდა ისეთივე მოხერხებული ნიშნები, რომელიც მათემატიკას აქვს თავის დარგში. «ალგებრის წარმატების საიდუმლოების ნაწილი, — ამბობს ლეიბნიცი, — მდგომარეობს მის ქარაქ-

---

განმარტების შესახებ იხ. ჩემი შრომა: О понятии существования в математике. Сообщения Академии наук Грузинской ССР, т. III, № 2, 1942, стр. 111 — 118). არ შეიძლება განსხვავების ცნება, გამოყენებული თუგინდ რაოდენობის მიმართ, თითონ გაგებული იყოს რაოდენობრივი მნიშვნელობით.

[1] К. Фишер, Лейбниц, 1905, стр. 470.

[2] Baumann, 59.

ტერისტიკაში ე. ი. სიმბოლოების გამოყენების ხელოვნებაში. ამიტომ გვაქვს შესაძლებლობა ვიოცნებოთ ახალ ალგორითმების, ახალ ალგებრების შექმნაზე, რომელნიც შეისწავლიან სხვა დამოკიდებულებებსაც, განსხვავებულს დამოკიდებულებებიდან სიდიდეებს შორის. კიდევ მეტი — არის იმედი დაყვანილი იყოს ყოველი მსჯელობა ნიშნების კომბინაციაზე და შესაძლებლობაა ვიოცნებოთ ისეთ დროზე, როცა ორი ფილოსოფოსი, დაუსრულებელ კამათის ნაცვლად, აიღებენ ორი მათემატიკოსის მსგავსად ხელ'ში კალამს და, დაჯდებიან რა მაგიდასთან, შეცვლიან კამათს ანგარიშით. საყოველთაო მათემატიკა იქცევა ამგვარად მსჯელობის აღრიცხვად (calculus ratiocinatoris) და ემთხვევა ლოგიკას».

ჩვენ აქ არ შევჩერდებით იმ ცდის ზოგად კრიტიკაზე, რომელიც მიზნად ისახავს განდევნილი იყოს ლოგიკიდან შინაარსობრივობა და ლოგიკა დაყვანილი იყოს გარეგნულ ანგარიშზე (ამ საკითხს ჩვენ ნაწილობრივად შევეხებით შემდეგ, თავი III, § 11) ჩვენი მოსაზრებანი ამ საკითხზე უფრო დაწვრილებით გამოთქმული გვაქვს სხვა შრომებში[1]. აღვნიშნავთ აქ მხოლოდ, რომ პირველ რიგში დავას გამოიწვევს თვით ის შეხედულება, რომელიც ლოგიკურ აღრიცხვაში ხედავს ფილოსოფოსების შორის დავის შეწყვეტის საშუალებას.

როცა უნდათ ლოგიკას მისცენ მათემატიზირებული ხასიათი, ამით თვით მათემატიკის ბუნება და დანიშნულება მახინჯდება (ამის შესახებ უფრო დაწვრილებით — შემდეგ). ის, რისი გაზიარება არ შეიძლება მათემატიკის მიმართ, თუ მისი ბუნება სწორედ იქნება გაგებული — რომ მათემატიკოსის ფანქარი მათემატიკოსზე უფრო ჭკვიანია, უკვე სავალდებულო ხდება არა მარტო მათემატიკოსის, არამედ ყოველი მეცნიერის მიმართ, თუ შესაძლებლად მივიჩნევთ ლოგიკის ანგარიშზე დაყვანას — მისი ფანქარი მასზე ჭკვიანი გახდება.

ასეთი წმინდა ალგორითმული მიდგომა თავს იჩენს ლეიბნიცის თვალსაზრისში უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის შესახებ. ლეიბნიცისათვის იმდენი მნიშვნელობა არა აქვს სათანადო ცნებების შინა-

---

[1] იხ., მაგალითად: О так называемых „содержательных аксиомах" математической логики. Сообщения Академии наук Грузинской ССР, т. I, № 6, 9, 10, т. II, № 1 — 2, 1940 — 1941. ამავე საკითხისადმი მიძღვნილია ჩვენი შრომა: К проблеме аксиоматизации логики, 1947.

არსს, რამდენადაც გარკვეულ ალგორითმულ სისტემის აგებას და საანგარიშო წესებს, რომლებსაც შესაფერისი სიმბოლოები უნდა დაემორჩილონ. ამიტომ ნაცვლად იმისა, რომ ჯერ ცნებები იყოს განსაზღვრული, შემდეგ მათზე წარმოებული მოქმედებანი და ამის საფუძველზე გამოყვანილი წესები ამ მოქმედებებისათვის, ლეიბნიცთან ცნებები ჯერ ლოგიკურ გაფორმებას ვერ ასწრებენ, რომ ისინი, სათანადო სიმბოლოებით წარმოდგენილი, უკვე ჩაბმული არიან საანგარიშო პროცედურაში, რომელსაც უკანა რიცხვით ევალება მასში მონაწილე ცნებების დახასიათება. საგნები, სანამ ისინი განსაზღვრულია, უკვე შესულია გარკვეულ ხასიათის დამოკიდებულებებში, რომლებიც თითონ განხილულია, როგორც საგნების დახასიათების საფუძველი.

ამის შემდეგ გასაგები უნდა იყოს, თუ რატომ ლეიბნიცი ისეთ დიდ მნიშვნელობას მათემატიკაში არ ანიჭებს პრობლემას, მაგალითად, თითონ უსასრულოდ მცირის ცნების დადგენისა. მისთვის მნიშვნელობა აქვს, უმთავრესად, სათანადო ალგორითმის (თითონ ლეიბნიცი ამგვარ შემთხვევაში ხალისით ხმარობს ტერმინს: ალგორითმი) აგებას, რომლითაც რეგულირებული იქნება დიფერენციალის და ინტეგრალის სიმბოლოებზე წარმოებული ოპერაციები და სხ.. «...ფორმის მიხედვით არგუმენტაციის ქვეშ, — ამბობს ლეიბნიცი [1], — მე მესმის არა მარტო არგუმენტაციის ის სქოლასტური ხერხი, რომლებითაც სარგებლობენ სკოლებში, არამედ ყოველი მსჯელობა, რომელსაც მიყავს დასკვნამდე თავისი ფორმის ძალით, რომელშიაც არც ერთი წევრის დამატება საჭირო არ ხდება. ამგვარად რაიმე სორიტი...., ან კიდევაც კარგად შედგენილი ანგარიში, ალგებრული გამოთვლა, უსასრულოდ მცირეთა ანალიზი არიან ჩემთვის არგუმენტაცია ფორმის მიხედვით, რადგან მათი მსჯელობის ფორმა იყო წინასწარ დამტკიცებული, ისე რომ შეიძლება დარწმუნებული იყო, რომ აქ არ შეგეშლება».

უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვა ლეიბნიცისათვის წარმოადგენს კომბინატორულ ხელოვნების ერთერთ ნიმუშს.

დიფერენციალის და ინტეგრალის ნიშნებზე მანიპულაციას ლეიბნიცი ამყარებს შემდეგ წესებზე: $x + dx = x$ და $\int dx = x$. გამოდის, რომ დიფერენციალების ერთად აღება შეადგენს განუწყვეტელ მონაკვეთს; ხოლო თითოეული, ცალკე აღებული, ჰქრება შედარე-

[1] Лейбниц. Новые опыты о человеческом разуме, стр. 423.

ბით სასრულო მონაკვეთთან. ეს, რასაკვირველია, აქტუალური უსასრულოდ მცირის ცნების გამომხატველია, მაგრამ ასეთი რამ ლეიბნიცს არ აშინებს, რადგან მისთვის მნიშვნელობა, უმთავრესად, სააღრიცხვო წესებს აქვს და არა სათანადო ცნების შინაარსს. მისთვის თვით ცნება კი არ არის საჭირო, არამედ ის, რაც სათანადო ფორმალური წესებით არის დახასიათებული, და ამ წესების მიხედვით გამოდის, რომ dx ვ ი თ ო მ დ ა ც ისეთი რამაა, რაც ნულია და ნულისაგან განსხვავებულიც. ეხლა შეიძლება თქვან, რომ ლეიბნიცს ასეთნაირად არ ესმის ნამდვილი შინაარსი უსასრულოდ მცირის ცნების და ლაპარაკობს მხოლოდ იმაზე, თუ როგორად ისინი გვეჩვენებიან გამოთვლების დროს. მაგრამ საქმე სწორედ იმასშია, რომ ლეიბნიცისათვის ცნების ხასიათი მის ფორმალურ გამოყენებაზე დაიყვანება, ცნებებისაგან ის მხოლოდ იმ როლს ითხოვს, რომელსაც ისინი სააღრიცხვო პროცედურაში თამაშობენ. ამიტომ ამ შემთხვევაში თითონ ფიქცია ხდება სათანადო რეალობად, უსასრულო მცირე სწორედ ის არის, რათაც ის გვეჩვენება გამოთვლების პროცესებში.

ჩვენ ვხედავთ, რომ ლეიბნიცის ფორმალისტური მიდგომა მჭიდროდ დაკავშირებულია აქტუალურ უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისთან. იმისათვის, რომ ვინმე აქტუალურ უსასრულოდ მცირის მომხრედ მივიჩნიოდ, არ არის საჭირო, რომ ის ვერ ხედავდეს ამ თვალსაზრისის სიძნელეებს. სიძნელეები, დაკავშირებული იმასთან, რომ ლაპარაკობენ ისეთ სიდიდეზე, რომელიც ნულიც არის და ნულისაგან განსხვავებული, ადვილად დასანახია. იმისათვის, რომ აქტუალურ უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისის მომხრე იყო, ის კი არ არის აუცილებელი, რომ გულუბრყვილოთ და ყოველ ეჭვებს გარეშე სცნო ასეთ სიდიდეების არსებობა, ან ეცადო ისინი ობიექტურად განახორციელო (სათანადო სიძნელეები სწორედ ამის წინააღმდეგ ლაპარაკობს), არამედ აქ საკმარისია სცნო, რომ, მიუხედავად აქტუალურ უსასრულოდ მცირის ცნების შინაარსობრივ სიძნელეების, მაინც შეიძლება ლაპარაკი ისეთ, თუგინდ წმინდა ფორმალურ ხასიათის, ობიექტებზე, რომელნიც აქტუალურ უსასრულოდ მცირის მსგავს როლს თამაშობენ, ისევე როგორც ვინმეს, მაგალითად, იდეალისტად მიჩნევა არ ნიშნავს, რომ მან, მართლაც, სინამდვილე გადააქცია იდეათ.

თუ ლეიბნიცი უსასრულოდ მცირის ცნების გარკვევას ერთნაირად უგულებელყოფს და ტოვებს მათემატიკის გარეშე, ეს იმას კი

არ ნიშნავს, რომ მისთვის მათემატიკა ფილოსოფიურ თვალსაზრისის გარეშე დგას, არამედ აქ სწორედ მჟღავნდება გარკვეული ფილოსოფიური მიდგომა, ამ შემთხვევაში ფორმალისტური ხასიათისა, ისევე როგორც ფილოსოფია — მათემატიკის აგებისა ფილოსოფიისაგან დამოუკიდებლად — მათემატიკის ფილოსოფიისაგან მართლაც განთავისუფლებას კი არ მოასწავებენ, არამედ თითონ ამჟღავნებს თავის სათანადო სისუსტეს (იხ. თავი III, § 10).

ლეიბნიცის ფორმალისტური მიდგომის შესახებ ჩვენ კიდევ შემდეგს შევნიშნავთ: როცა ლეიბნიცი უტოლებს ერთი მეორეს სასრულო სიდიდეებს, რომელნიც ერთი მეორისაგან უსასრულოდ მცირით განსხვავდებიან და ა. შ., შეიძლება გავიხსენოთ უკვე ზემოთაღნიშნული გარემოება, რომ თვით ტოლობის ცნებაც ლეიბნიცს ესმის არა შინაარსობრივად, არამედ ფორმალისტურად, როგორც შესაძლებლობა ტერმინების ჩასმისა ერთი მეორის ნაცვლად. ეს ნამდვილად საქმეს კი არ შველის, არამედ მხოლოდ გამოხატავს ფორმალიზმის სიძნელეებს: წმინდა ფორმალისტურ მიდგომისათვის უფრო ადრე საჭირო იქნება თვით ცნებების ფორმალიზაცია, რომლების საშუალებით მას სურს სათანადო ფორმალიზაციის მოხდენა და ა. შ.

მიდრეკილება უსასრულოდ მცირის ცნება ერთნაირი იოლი გზით ყოფილიყო შემოყვანილი, გარეშე ღრმა შინაარსობრივ განსაზღვრისა, კარგად არის სიმბოლიზირებული დედოფალი სოფიო შარლოტას სახუმარო პასუხით ლეიბნიცის ცდაზე აეხსნა მისთვის უსასრულოდ მცირე, — რომ ეს ცნება მას ისედაც მშვენივრად ესმის სასახლის კარისკაცების უსასრულოდ მცირე დამოუკიდებლობის მაგალითზე.

ლეიბნიცის და მისი სკოლის მიდგომისათვის მეტად დამახასიათებელია, რომ გამოჩენილია ერთნაირი განურჩევლობა ფორმულებს: $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ და $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ შორის. იმის ნაცვლად, რომ წარმოებულის შემოყვანა დიფერენციალის შემოყვანას უსწრებდეს, $\frac{dy}{dx} = f^1(x)$, გაგებულია როგორც $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, როგორც წარმოებულის შემოყვანის გზა. დიფერენციალები dx, dy გაგებულია, როგორც Δx, Δy ნაზრდების უკანასკნელი მნიშვნელობა გაქრობის წინ და $\frac{dy}{dx}$ — როგორც ფუნქციის და არგუმენტის ნაზრდების უკანასკნელი შეფარ-

დება. აქ კვლავ მჟღავნდება აქტუალურად უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისი. როცა მცირის ფარგლებში ერთნაირ განურჩევლობას იჩენენ Δy და dy, მრუდის ნაზრდსა და მხების ნაზრდს შორის, მრუდის მცირე ნაწილაკები ისე აქვთ წარმოდგენილი, ვითომდაც ისინი სწორები იყვნენ.

ამგვარი მიდგომის დროს წარმოებულის წარმოშობა დაიჩრდილა და დიფერენციალები, სანამ ისინი მოასწრებენ გაფორმებას, როგორც გარკვეული შინაარსის მქონე ცნებანი, უკვე ჩაბმული არიან საალრიცხვო პროცედურაში და თითონ მისგან ელიან უკანა რიცხვით თავის დახასიათებას. ნაცვლად იმისა, რომ ალრიცხვის წესები სათანადო ცნებების შინაარსზე დაყრდნობით იყოს დაფუძნებული, ისინი ადრევე მოქმედობენ და მათი მოქმედების მიხედვით საქმე ისე უნდა წარმოვიდგინოთ, ვითომდაც მრუდის მცირე ნაწილაკები სწორებია და ა. შ... ამ შემთხვევაში მნიშვნელობა აქვს არა იმას, თუ რა არიან თავისთავად ეს ნაწილაკები, არამედ როგორ გვეჩვენებიან ალრიცხვის ფორმალური წესების მიხედვით. ფორმალისტურ მიდგომასთან დაკავშირებული ეს ილუზიონიზმი, როგორც ეს ზემოდაც იყო ალნიშნული, სავსებით შეგუებულია ჩვენს შემთხვევაში აქტუალურ უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისთან.

მიუხედავად იმ ლოგიკურ ნახტომისა, რომლის საშუალებით არენაზე თავიდანვე დიფერენციალები გაჩნდენ, თვით ამ დიფერენციალების წამოწევას ისტორიულად ის დადებითი მნიშვნელობა ჰქონდა, რომ შესაძლებელი გახდა თავიდანვე დიფერენციალების აპარატის ამუშავება, რომელსაც, როგორც ზემოთ ალნიშნულია, გარკვეული ფორმალური უპირატესობა აქვს შედარებით წარმოებულების აპარატთან, ისე რომ მათემატიკოსებს თავიდანვე საუკეთესო სახით მიეცათ სათანადო ფორმალური აპარატურა სხვადასხვა საკითხების გადასაწყვეტად.

დღეს ჩვენ ვიცით, რომ დიფერენციალების აპარატის ფორმალური სიძლიერე სასწაული კი არ არის, რომელსაც ფორმალისტური მიდგომა ახდენს, ცნებების შინაარსიის თავიდანვე უგულებელყოფის და ანგარიშგაუწევლობის ხარჯზე, არამედ, პირიქით, სრული დასაბუთება და გამართლება თვით დიფერენციალების აპარატის ფორმალური უპირატესობისა შეიძლება მხოლოდ სათანადო შინაარსობრივი კვლევა-ძიების ნიადაგზე.

საგნების სათანადო ფორმალურ მხარეების ალნიშვნა სრულებით არ ნიშნავს ფორმალისტურ თვალსაზრისზე დგომას. მაგრამ ასეთი

ფორმალისტური მიდგომა იჩენს თავს, როცა საქმეს შინაარსობრივ დასაბუთებას აშორებენ და მას წარმოიდგენენ, როგორც წმინდა სიმბოლოების თამაშის შედეგს. ლეიბნიცი უკიდურესობაშივარდებოდა, როცა მათემატიკური ანალიზის წარმატების საიდუმლოების ახსნას კარგად შერჩეულ აღნიშვნების ხერხს უკავშირებდა. საქმე სათანადო საგნების და ცნებების ხასიათშია, თუნდაც იმავე დიფერენციალის და ინტეგრალის ცნების, და არა მათ აღსანიშნავად გამოყენებულ სიმბოლოებში. ამ ცნებების შექმნა თითონ პრაქტიკით არის ნაკარნახები და თუ თეორიის განვითარების პირველ საფეხურებზე თეორიისათვის ლოგიკურად სავსებით დახვეწილი ხასიათის მიცემა არ ხერხდება, ეს კიდევ არ ნიშნავს, რომ სათანადო წარმატებანი აიხსნას გამოყენებული სიმბოლიკის რაღაც იდუმალი ძალით. ცდა მათემატიკისათვის ფორმალისტური ხასიათის მიცემისა კიდევ არ ნიშნავს, რომ ეს ცდა უკვე განხორციელებულია, მათემატიკიდან შინაარსობრივობა მართლაც განდევნილია. საქმე სწორედ არის ამგვარი ფორმალიზაციის განხორციელების შეუძლებლობაში. ლეიბნიცის მიერ წარმოებულ წესებს დიფერენციალებისათვის და სხ. ნამდვილად გარკვეული რეალური საფუძველი ჰქონდა.

ლეიბნიცის დიდი მნიშვნელობა მათემატიკის განვითარებისათვის არ ნიშნავს, რომ ამით გამართლებულია თითონ ფორმალისტური კონცეპცია. აგრეთვე თუ თუნდაც აქტუალურ უსასრულოდ მცირის ცნებაც სასარგებლო აღმოჩნდა მეცნიერებისათვის, ეს — ამ ცნებასთან დაკავშირებულ შემცდარ წარმოდგენების გამო კი არა, არამედ იმ საღ ელემენტების გამო, რომელიც, წინააღმდეგ ამ შემცდარ წარმოდგენებისა, ჩვენს ცნებაში მაინც იყო. ამ ცნებით გაუშლელი სახით მაინც მოცემული იყო ერთნაირი წარმოდგენა ცვლად სიდიდეზე, რადგან შეუსაბამობა ორი მოთხოვნილების შეერთებისა: ნულისაგან განსხვავებული და ყოველ დადებით სიდიდეზე ნაკლები — ერთ გარკვეულ ფიქსირებულ სიდიდეში ყველასათვის თვალსაჩინოა და ეს შეერთება აღითქმება უფრო ღრმად და აქ თუნდ ფარული სახით უკვე იჭრება ცვალების მომენტი.

თუ მეცნიერების შემდგომი განვითარება ამას გამოავლენს და სათანადო ცნებას დააზუსტებს, ეს სწორედ ამ განვითარების სასარგებლოდ ლაპარაკობს და არა ამ განვითარების წინააღმდეგ, როგორც იმის საბუთი, რომ ყველაფერი უკვე ადრევე მოცემული იყო და თვით მოძველებული წარმოდგენები ყველა თავის შეცდომებით გამართლებულია. ხომ თითონ შემდგომი განვითარება მეცნიერები-

სა საშუალებას იძლევა სათანადო იდეების ჩანასახები დავინახოთ უკვე მეცნიერების ადრინდელ საფეხურებზე. როცა წარსულის მოდერნიზაციას ახდენენ, სწორედ თანამედროვეობას ემყარებიან და ამით ყველაზე ნაკლებად შეიძლება ეს თანამედროვეობა ზედმეტი გახადო. თუ გუშინდელ დღეს შეცდომებისაგან გაწმენდენ, რაც დარჩება ამავე გუშინდელ დღეში მხოლოდ გუშინდელ დღეს კი არ ეკუთვნის, არამედ დღევანდელსაც.

2. ნიუტონი

ჩვენ ზემოთ მოკლედ დავახასიათეთ უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის ლეიბნიცის კონცეპცია. უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის მეორე ფუძემდებლის ნიუტონის მიდგომა ლეიბნიცის მიდგომისაგან საკმაოდ განსხვავებულია. ის მჭიდროდ დაკავშირებულია მექანიკურ ხასიათის წარმოდგენებთან და ნიუტონის მიერ შემოღებული ცნებები მათემატიკური ანალიზისა, ასე ვთქვათ, მექანიკის ტონებშია მოცემული. ნიუტონისათვის დრო წარმოადგენს უნივერსალურ დამოუკიდებელ ცვლადს სხვადასხვა ცვლადებისათვის, რომელნიც განხილული არიან, როგორც მისი ფუნქციები. ისინი ერთგვარად მიედინებიან დროში. მათთვის ნიუტონი ხმარობს კავალიერისაგან ნასესხებ ტერმინს—ფლუენტა. ფლუენტის ცვალების სიჩქარეს ნიუტონი ფლუქსიას უწოდებს. ეს არის ის ცნება, რომელსაც დღეს, რასაკვირველია, სათანადოდ დახვეწილ სახით მოცემულს, ჩვენ ვიცნობთ წარმოებულის სახელწოდებით, ოღონდ აქ წარმოებული აღებულია დროის მიმართ. ფლუქსიების შეფარდების სახით გამოთქმული იქნება ერთი ცვლადის სიჩქარე მეორეს მიმართ, პირველის წარმოებული მეორის მიმართ.

ფლუქსიის ცნება ნიუტონისათვის ელემენტარული ხასიათის არის და სპეციალურ განმარტებას არ საჭიროებს. სიჩქარე ნიუტონთან მოცემულია და ნატურალური სახით არსებობს მოძრაობასთან ერთად და თვით მოძრაობის და ცვალების კონკრეტული პროცესი შეიცავს სიჩქარეს. მაგრამ ნიუტონს შენილბულად მაინც უხდება ერთგვარი აგება ფლუქსიის ცნებისა, როცა ის ფლუქსიების გამოთვლის ხერხის შედგენაზე გადადის. აქ წამოიჭრება ის საკითხები, რომელნიც უსასრულოდ მცირეების ხმარებასთან არის დაკავშირებული.

პირველ ხანებში ნიუტონი თავისუფლად სარგებლობდა უსასრულოდ მცირე სიდიდის ცნებით და ასეთი სიდიდეების უკუგდების ხერხით. მაგრამ ამავე დროს ის ხედავდა ამასთან დაკავშირებულ

ლოგიკურ სიძნელეებს. ლეიბნიცისათვის ეს სიძნელეები ერთგვარად შერბილებული იყო მისი ფორმალისტური კონცეპციის გამო. ნიუტონის თვალსაზრისი უფრო საგნობრივი ხასიათის არის და მისთვის შინაარსობრივი დაფუძნების პრობლემა უფრო მწვავედ დგას. შემდეგში ნიუტონი ცდილობს ერთგვარად მოიცილოს ინფინიტეზიმალური მიდგომა, მაგრამ ამის განხორციელებას, როგორც დავინახავთ, ვერ ახერხებს. «მე განვიხილავ აქ მათემატიკურ სიდიდეებს,— ამბობს ის თავის ტრაქტატში მრუდთა კვადრატურის შესახებ,— არა როგორც შედგენილს უმცირეს ნაწილაკებისაგან, არამედ როგორც მიღებულს განუწყვეტელ მოძრაობით» [1]. უსასრულოდ მცირის ცნება მას მიაჩნია როგორც «არასაკმაოდ მკაცრი და მათემატიკური» და შესაძლებლად მიაჩნია უსასრულოდ მცირეთა გამოყენება მხოლოდ ევრისტულ მიზნით. «მათემატიკურ საკითხებში,— ამბობს ნიუტონი,— არ შეიძლება უგულებელყოფა თუნდ უმცირეს შეცდომებისაც» [2].

ნიუტონი ერიდება ტერმინის «უსასრულოდ მცირე» ხმარებას და მის ნაცვლად ლაპარაკობს ქრებად სიდიდეებზე, უკანასკნელ მნიშვნელობებზე და სხვა. მაგრამ, რასაკვირველია, აქ სიძნელე მხოლოდ სხვა გარეგნულ სახეს ღებულობს. საქმეს არ შველის მითითება იმაზე, რომ განიხილება არა მომენტების სიდიდე, არამედ მათი შეფარდება, რადგან, როცა მათ შეფარდებაზეა ლაპარაკი, ხომ სწორედ ეს მომენტები იგულისხმება. ეს შეფარდება ხომ ვერ გააუქმებს უკანა რიცხვით იმათ, რისი შეფარდებაც ის არის. აქ ჩვენ უფრო სიძნელეების გათვალისწინებასთან გვაქვს საქმე, ვიდრე მათ გადალახვასთან. თუ აქტუალურ უსასრულოდ მცირის ცნებასთან დაკავშირებული ობიექტურად არსებული სიძნელეები ძალაუნებურად ამჟღავნებს თავს და ამას არ შეიძლება ანგარიში არ გაუწიოს იმანაც, ვინც ამ ცნებით სარგებლობს, ეს არ ნიშნავს, რომ ამით სიძნელე უკვე დაძლეულია. პირიქით, ცდა სიძნელის ერთნაირი შენიღბვისა და მისთვის ისეთი გარეგნული სახის მიცემისა, რომ თვალში ერთბაშად საცემი არ იყოს, ადასტურებს მისი არსებობის ფაქტს.

მოვიყვანთ ერთ ამონაწერს ნიუტონის «ნატურალურ ფილოსოფიის მათემატიკურ საწყისები»-დან, რომელიც მკაფიოდ ამჟღავნებს, რომ ნიუტონი, მიუხედავად თავის ცდებისა, ვერ ახერხებს გადალახოს აქტუალურად უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისი. «... თუ მე ...

[1] Ньютон. Математические работы, 1937, стр. 167.
[2] Ibid., 168.

განვიხილავ რაიმე სიდიდეებს, როგორც ვითომდა შედგენილს მუდმივ ნაწილაკებისაგან ან თუ სწორებად ვიღებ მრუდის მცირე ნაწილაკებს, უნდა ვიგულისხმოთ, რომ ეს არის არა განუყოფლები, არამედ გასაყოფადი სიდიდეები, რომელნიც ჰქრებიან, რომ ეს არის არა ჯამები და შეფარდებანი გარკვეულ სასრულო ნაწილების, არამედ ქრებად სიდიდეების ჯამების და შეფარდებების ზღვრები...» «გვეუბნებიან, რომ ქრებად სიდიდეებისათვის არ არსებობს «ზღვარითი შეფარდება», რადგან შეფარდება, რომელიც მათ აქვთ გაქრობის წინ, არ არის ზღვარითი, გაქრობის შემდეგ კი არავითარი შეფარდება არაა... ქრებად სიდიდეების ზღვარითი შეფარდების ქვეშ უნდა იყოს გაგებული სიდიდეების შეფარდება—არა მათ გაქრობის წინ, ან გაქრობის შემდეგ, არამედ შეფარდება, რომლითაც ისინი ჰქრებიან... ზღვარითი ჯამი სიდიდეების, რომელნიც ისპობიან ან ჩაისახებიან, არის მათგან შედგენილი ის ჯამი, როცა ისინი... მხოლოდ იწყებენ ან წყვეტენ ყოფნას... შეიძლება გვითხრან, რომ, თუ არსებობს ქრებად სიდიდეების ზღვარითი შეფარდება, მაშინ არსებობს მათი ზღვარითი მნიშვნელობანიც და, მაშასადამე, ყოველი სიდიდე უნდა შედგებოდეს განუყოფლებისაგან... ზღვარითი შეფარდება ქრებად სიდიდეების არ არის მათი ზღვრების შეფარდება, არამედ არის ის ზღვრები, რომლებისაკენ სიდიდეების უსასრულო შემცირებისას უახლოვდებიან მათი შეფარდებანი და რომელთანაც შეუძლიათ უფრო ახლოს მივიდნენ, ვიდრე ყოველი წინასწარ აღებული სხვაობა...» [1].

სიძნელე სწორედ იმასში მდგომარეობს, რომ ვილაპარაკოთ შეფარდებაზე ისეთი სიდიდეების, რომელნიც გაქრობის მდგომარეობაში არიან. ნიუტონს უნდა მდგომარეობის შემსუბუქება იმაზე მითითებით, რომ ლაპარაკია ამ შეფარდებაზე არა გაქრობის წინ ან შემდეგ, არამედ თვით გაქრობის მომენტში. გამოდის, რომ ქრებად სიდიდეების შეფარდების ფიქსაციისათვის ის მომენტი არის გამოყენებული, რომელიც მოცემულია თვით ქრებად სიდიდეთა შეფარდებით—და არა ჯერ არ გამქრალი და არც უკვე გამქრალი სიდიდეების შეფარდებით,—შეფარდებით, «რომლითაც» ისინი ჰქრებიან. გამოდის, რომ ეს შეფარდება იმ მნიშვნელობებს კი არ შეეხება, რომელნიც ჰქრებიან, არამედ თვით ეს მნიშვნელობანი მხოლოდ იმ

[1] Ньютон. Математические начала натуральной философии, пер. Крылова, 1936, кн. I, отд. I, поучение к 11 лемме, стр. 69-70.

შეფარდებისათვის გვაქვს, «რომლითაც» ისინი ქრებიან, ისე რომ ეხლა მ ა თ ი შეფარდებაც საშიში არ უნდა დარჩეს.

ამგვარივე ლოგიკური ნაკლი ახასიათებს იმ დამატებით მოსაზრებას, რომ ზღვარითი შეფარდება ქრებად სიდიდეების არის არა მათი ზღვრების შეფარდება, არამედ ის ზღვრები, რომლებისკენაც მათი შეფარდებანი მიისწრაფვიან. რასაკვირველია, თუ დავდგებით თანამედროვე ზღვართა თეორიის თვალსაზრისზე, უსასრულოდ მცირეთა შეფარდების ზღვრის გამომხატველი ვერ იქნება მათი ზღვრების შეფარდება (უკანასკნელი იქნებოდა განუზღვრელობა $\frac{0}{0}$). მაგრამ სულ სხვა მდგომარეობაა ნიუტონთან. მისთვის სათანადო შეფარდების ზღვარი არის ზღვარითი შ ე ფ ა რ დ ე ბ ა, შეფარდება უკანასკნელ, გაქრობის მომენტში, მაშინ როცა მრიცხველი და მნიშვნელი გაქრობის მდგომარეობაში არიან. ამიტომ ეს შეფარდება დაკავშირებულია ცალკე მრიცხველის და ცალკე მნიშვნელის ქრებად მნიშვნელობასთან. ხომ სწორედ მ ა თ ი შეფარდება აქვთ მხედველობაში. თითონ მათი შეფარდება ხომ არ ცვლის მათ უკანა რიცხვით და არ ქმნის ახალ ფონს მათივე შეფარდებისათვის. ნიუტონს უნდა ის სიძნელე, რომელსაც ქმნის მ ა თ ი შეფარდების უკანასკნელი მნიშვნელობა, იმით შეარბილოს, რომ საქმე დაუკავშიროს არა მათ უკანასკნელ მნიშვნელობებს, არამედ მხოლოდ იმავე მათი შეფარდების უკანასკნელ მნიშვნელობას. გამოდის, რომ მათ უკანასკნელ მნიშვნელობებს მათი შეფარდება თითონ მათთვის კი არ ტოვებს, არამედ მხოლოდ იმავე მათ შეფარდებისათვის.

ჩვენ ვხედავთ, რომ ნიუტონი, მიუხედავად მისი ენერგიული ცდებისა, ვერ ახერხებს დაძლიოს აქტუალურ უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისი. მიუხედავად მისი მიდგომის არსებითი განსხვავებისა ლეიბნიცის მიდგომისაგან, ეს თვალსაზრისი ორივესათვის საერთოა და, საზოგადოთ, მისით არის აღნიშნული პირველი ხანა უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის განვითარებისა.

ის, რომ აქტუალურ უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისის გატარების დროს მჟღავნდება სათანადო სიძნელეები, რომ ამ თვალსაზრისშივე მოცემულია მისივე უკუგდების საფუძველი, რომ თითონ აქტუალურ უსასრულოდ მცირის ცნებაში არის ჩანასახი უსასრულოდ მცირის განხილვისა, როგორც ცვლად სიდიდისა, — ყველაფერი ეს ამ თვალსაზრისის არსებობის ფაქტს კი არ აუქმებს, არამედ, პირიქით, სწორედ მას და მის ხასიათს შეეხება.

3. უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დაფუძნების განვითარება ნიუტონის და ლეიბნიცის შემდეგ

უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვას, როგორც გარკვეულ მათემატიკურ აპარატს, პირველ ნაბიჯებიდანვე უდიდესი წარმატება ხვდა. მისი საშუალებით დიდის სიადვილით და სიმარტივით წყდებოდენ ისეთი საკითხები, რომლების წინაშე ძველი მათემატიკოსები ან სრულებით უძლურნი იყვნენ ან დიდის სიძნელით ახერხებდენ მათ გადაწყვეტას, ყოველ კერძო შემთხვევაში სპეციალურ რთულ და ხელოვნურ ხასიათის ხერხების მოგონებით.

მხებების, სიჩქარეების, ფუნქციის მაქსიმუმის და მინიმუმის, ფართების, მოცულობების და სხ. პრობლემებმა ისეთი მეთოდები შეიძინეს, რომლებიც მათ გადაწყვეტისათვის იყო ზედგამოჭრილი. ახალ აღრიცხვამ უფართოესი გამოყენება მოიპოვა მათემატიკის მთელ რიგ დარგებში და აგრეთვე მოსაზღვრე მეცნიერებებში: გეომეტრიაში, მექანიკაში, ასტრონომიაში, ფიზიკაში და სხ. ასეთივე ფართო გასაქანი მოიპოვეს ამ მეთოდებმა ტექნიკაში.

შეიქმნა ასეთი მდგომარეობა: აღრიცხვა, რომელიც არამცთუ იყო ლოგიკურად დამაკმაყოფილებლად დაფუძნებული, არამედ რომლის საფუძველი, საზოგადოთ, ლოგიკურად ძალიან საეჭვოდ ჩანდა, ამავე დროს განსაკუთრებით ნაყოფიერი აღმოჩნდა. ლოგიკური ნაკლები უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვისა თავიდანვე დასანახი იყვნენ, მაგრამ კიდევ უფრო აშკარად იყვნენ გამოვლენილი იმ შემოტევის შემდეგ, რომელიც ამ აღრიცხვის ლოგიკური საფუძვლების წინააღმდეგ მოახდინა, კერძოთ, ბერკლიმ. ბერკლის კრიტიკის განხილვაზე ჩვენ შემდეგ შევჩერდებით. ეხლა კი შემდეგს აღვნიშნავთ. შექმნილმა მდგომარეობამ, ერთის მხრით, ერთნაირად გააძლიერა ინტერესი საფუძვლების მიმართ, მაგრამ, მეორე მხრით, გამოიწვია ერთგვარი შიში ამ საფუძვლების კვლევა-ძიების მიმართ. შეიქმნა შთაბეჭდილება, რომ თვით სიძლიერე უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვისა დაკავშირებულია მის ლოგიკურად გაუმართავ ხასიათთან, პრინციპიალურ შეუძლებლობასთან მისი ლოგიკური დაფუძნებისა, მასში მოქცეულ ირაციონალურ მომენტთან. ამავე დროს მათემატიკოსები იმდენად გატაცებული იყვნენ კონკრეტულ მასალის დამუშავებით, რომლის წარმატება მათ თვალში უკვე საკმაოდ ამართლებდა მათ მიერ გამოყენებულ ხერხებს, რომ საფუძვლების პრობლემებს ერთნაირად უგულებელყოფდენ და თავს არიდებდენ.

ახალი აღრიცხვის საწყის მძაფრ განვითარების პერიოდში არ იყო ჯერ მომზადებული ნიადაგი მეთოდიურ მუშაობისათვის საფუძვლების დადგენის მხრივ. ამ აღრიცხვასთან დაკავშირებული ლოგიკური სიძნელეები ერთგვარად «მოშინაურებული» იყვნენ, ეს სიძნელეები, ნაცვლად იმისა, რომ მიჩნეული ყოფილიყვნენ, როგორც ნიშანი სათანადო ცნებების არსებულ განმარტებათა და ა. შ. ნაკლოვანებისა, განხილული იყვნენ როგორც თვით შესაფერ ობიექტების გარკვეული დამახასიათებელი ნიშნები, ერთი სიტყვით აქ გაჭირება გადაქცეული იყო სიკეთედ. სიძნელეებმა თითონ მიიღეს გარკვეული ლოგიკურად დადებითი ფუნქციები, გამოყენებული იყვნენ, როგორც სათანადო ობიექტების თავისებურებების გამომხატველი, რომლებსაც ამ ობიექტებისათვის იმდენად განსაკუთრებული ხასიათი უნდა მიეცათ, რომ თვით კრიტიკულ ხასიათის საბუთების ზედმოქმედების ფარგლებიდან გამოეყვანათ; თითონ სიძნელეების ფაქტი, ნაცვლად იმისა, რომ გაგებული ყოფილიყო, როგორც ასეთი, შეფასებული იყო, როგორც სათანადო ობიექტის სრულებით განსაკუთრებული ხასიათის გამომხატველი და მისი ლოგიკური ხელუხლებლობის დამცველი.

მათემატიკოსები ერთგვარადაც კეკლუცობდნენ იმით, რომ ლოგიკურად გაუმართავ ცნებების საშუალებით, «მათემატიკის მიუწვდომელ გამოცანათა» (იმდროინდელი პოპულარული გამოთქმა) პირობებში ისინი ღებულობდნენ განსაცვიფრებელ შედეგებს. თითონ მათემატიკურ თეორიების არსებობის და მათი წარმატების ფაქტი მიჩნეული იყო, როგორც ერთგვარად შემანელებელი ამ თეორიების ლოგიკურ დაფუძნების საჭიროებისა. დალამბერს მიაწერენ ასეთ პასუხს ერთერთ დამწყებ მათემატიკოსის ეჭვებზე, რომელიც შეაშინა უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის ლოგიკურად არაზუსტ ხასიათმა: «წადით წინ და დარწმუნებულობა გაგიჩნდებათ» (allez de l'avant, la foi vous viendra).

ასეთი უგულებელყოფა დაფუძნების საკითხებისა წარმოადგენდა რთული მდგომარეობის ერთ მხარეს. ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ, რომ უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის ლოგიკური სიძნელეები, ერთის მხრით, მიუთითებდა საფუძვლების დამუშავების საჭიროებაზე და ერთნაირ ყურადღებას იწვევდა დაფუძნების საკითხებისადმი, მაგრამ, მეორეს მხრით, ერთნაირ შიშსაც ქმნიდა ამ საკითხებთან ახლოს მოსვლისა. საქმე ისე არ უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის განვითარების პირველ ეტაპებზე დაფუძ-

ვნების საკითხების გარეშემო მუშაობა სრულებით არ სწარმოებდა. ასეთი მუშაობა ყოველთვის სწარმოებდა და თუგინდ ის თვალსაზრისი, რომელიც მათემატიკურ ანალიზისათვის ლოგიკურ დაფუძნების მნიშვნელობას უგულებელყოფს, თითონაც ბოლოსდაბოლოს წარმოადგენს გარკვეულ ცდას, მართალია ლოგიკურად გაუმართლებელს, დაფუძნების საკითხების მოგვარებისა. მაგრამ პირველ ხანებში მთავარი მუშაობა შეეხებოდა თეორიის გაფართოვებას მასალის მხრივ და არა მის გაღრმავებას საფუძვლების მიმართულებით და არ იყო მთელი თავისი მნიშვნელობით გათვალისწინებული დაფუძნების პრობლემა. და დამახასიათებელია, რომ ზემოთმოყვანილ პასუხს მიაწერენ დალამბერს, რომელმაც თითონ გარკვეული მნიშვნელოვანი ნაბიჯი გადადგა წინ უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის საფუძვლების დადგენის საქმეში.

დალამბერი ცდილობს მათემატიკური ანალიზი ზღვართა თეორიას დააყრდნოს. ის ხაზს უსვამს იმას, რომ «დიფერენციალურ აღრიცხვაში ლაპარაკია არა უსასრულოდ მცირე სიდიდეებზე, არამედ მხოლოდ სასრულო სიდიდეების ზღვრებზე... სიტყვებით «უსასრულოდ მცირე» სარგებლობენ მხოლოდ გამოთქმის შესამოკლებლად». მართალია, ნიუტონიც ცდილობდა ერთნაირად თავი მოერიდა უსასრულოდ მცირეებისათვის, მაგრამ ეს იყო მხოლოდ სურვილი სიძნელეების თავიდან აცილებისა, და ნიუტონთან სავსებით შენარჩუნებულია აქტუალური უსასრულოდ მცირენი ცხადი თუ შენიღბული სახით. როცა ნიუტონი იყენებს ზღვრის ცნებას და ლაპარაკობს ქრებად სიდიდეთა ზღვარით შეფარდებაზე, ეს არსებითად არის მისთვის აქტუალურ უსასრულოდ მცირეთა შეფარდება. სულ სხვა მდგომარეობაა დალამბერთან. ის ლაპარაკობს არა ქრებად სიდიდეთა ზ ღ ვ ა რ ი თ შ ე ფ ა რ დ ე ბ ა ზ ე, არამედ გარკვეულ სასრულო სიდიდეთა შეფარდების ზ ღ ვ ა რ ზ ე, ისე რომ მასთან უკვე აქტუალური უსასრულოდ მცირენი არ არიან შენიღბული ზღვარითი შეფარდების მრიცხველის და მნიშვნელის სახით. ეს, რასაკვირველია, გარკვეული მნიშვნელოვანი წარმატებაა შედარებით თუგინდ იმავე ნიუტონის მიდგომასთან და მან ხელი შეუწყო შემდგომში ზღვარითი თვალსაზრისის კიდევ უფრო განმტკიცებას. მაგრამ ჯერ კიდევ მათემატიკური ანალიზის ზღვართა თეორიაზე დაყრდნობის საქმის სრული რეალიზაცია შორსაა. ზღვარსა და ცვლადს შორის ჯერ კიდევ არ არის მონახული მტკიცე კავშირი, ზღვარი ერთნაირად მოწყვეტილია ცვლადისაგან და ზღვარზე გადა-

სვლას აქვს უფრო ხასიათი უსასრულობაში გადაკარგულ და მიუღწეველ საფეხურისაკენ ნახტომისა უკანასკნელ მომენტში, ვიდრე ბუნებრივი განვითარებისა.

უსასრულოდ მცირის და ზღვრის ცნებებთან დაკავშირებულ სიძნელეების ზედგავლენით ლაგრანჟი შეეცადა მათემატიკური ანალიზის ძირითადი ცნებანი, პირველ რიგში წარმოებულის ცნება, გამოეყვანა ერთგვარი გარეგნული სახით. რაიმე $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული არის მის მიერ განსაზღვრული წმინდა ალგებრულ-ფორმალური გზით და განხილულია, როგორც მხოლოდ კოეფიციენტი $f(x)$ ფუნქციის გარკვეულ სახის უსასრულო წკრივად დაშლის მეორე წევრისა. ლაგრანჟის დაფუძნებამ ხაზი გაუსვა საქმის სათანადო ალგებრულ მხარეს, მაგრამ ამ დაფუძნების მნიშვნელობა არ უნდა იყოს გაგებული როგორც რეალიზაცია თითონ იმ ამოცანისა, რომელიც მის მიერ იყო დასახული. პირიქით, თითონ ლაგრანჟის თვალსაზრისის გატარებამ ხელახლა გამოავლინა ზღვრის ცნების აუცდენლობა და თვით ლაგრანჟი თავის «მექანიკის» მეორე გამოცემაში საჭიროდ თვლის დაუბრუნდეს უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვას და მის აღნიშნებს.

ლაგრანჟს უნდა განდევნოს წარმოებულის ცნება და შეცვალოს ის სათანადო ფორმულის გარკვეული ელემენტით. ის ცდილობს სრულებით უგულებელყოს წარმოებულის ცნების საკუთარი შინაარსი, როგორც გარკვეული შეფარდების ზღვრისა, და ამ ცნების წარმოშობა. მაგრამ თვით ცდაში წარმოებულის ცნების უკუგდებისა და მისი გარკვეულ კოეფიციენტით შეცვლისა, სწორედ ეს ცნებაა მიღებული მხედველობაში თავისი საკუთრივი შინაარსით. სწორედ ამ ცნებას შეეხება ცდა მისი წმინდა ალგებრული ფორმალიზაციისა. გვიანაა იმის შემდეგ, როცა საკითხის დასმა ამ ცნებას შეეხება, დაარწმუნო შენი თავი, რომ მასზე, როგორც ასეთზე, არ ფიქრობ და მხედველობაში მხოლოდ გარკვეული კოეფიციენტი გაქვს. როცა ზღვრის ცნებასთან დაკავშირებულ სიძნელეების იმგვარად აცილება უნდათ, რომ ამას თითონ ზღვრის ცნებას გადააყოლებენ, ამით, პირიქით, ადასტურებენ ცნობას მათ განუყრელობის და სიძნელის აუცდენლობის.

ლაგრანჟი მიმართავს ფუნქციების წკრივად დაშლას, მაგრამ ეს დაშლა და, საზოგადოთ, მთელი წკრივთა თეორია და თითონ წკრივის ცნება ზღვრის ცნებას ემყარება, ისე რომ ამ გზით ვერ მოხერხ-

დება ზღვრის ცნების და მასთან დაკავშირებულ უსასრულოდ მცირის ცნების თავიდან აცილება.

მათემატიკურ ანალიზის საფუძვლების მხრივ სიძნელეების გადალახვა და ზღვართა თეორიისათვის ლოგიკურად გამართული ხასიათის მიცემა შესაძლებელი გახდა მხოლოდ მეცხრამეტე საუკუნეში, როცა უკვე მომზადდა ნიადაგი სისტემატური და გაღრმავებული კვლევა-ძიებისათვის მათემატიკურ ანალიზის და, საზოგადოთ, მათემატიკის დაფუძნების დარგში.

ამ მხრივ უდიდესი გარდატეხა მოახდინა კოშიმ. მან დაისახა მიზნად მკაცრი ანალიტიკური აგება უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის თეორიისა. კოშიმ მთელი თეორიის გასწვრივ სისტემატურათ გაატარა ზღვართა თვალსაზრისი და ამ თვალსაზრისის მიხედვით მოახდინა ზუსტი განსაზღვრა ანალიზის ძირითადი ცნებების. მეტად საყურადღებო გარემოებად მეცნიერების ისტორიაში ბორელს მიაჩნია განსხვავება კოშის «Analyse algébrique» (1821) ლაკრუას ცნობილ სახელმძღვანელოდან: «Traité du calcul différentiel et du calcul intégral», რომლის მეორე გაფართოვებული გამოცემა 1810 წელს გამოვიდა. მიუხედავად იმისა, რომ ამ ორ ნაწარმოებს ერთი მეორისაგან რამოდენიმე წელი აშორებს, უკანასკნელი არის დამახასიათებელი ნაწარმოები მე-18 საუკუნის, პირველი კი დამახასიათებელი ნაწარმოები მე-19 საუკუნის [1].

კლეინს პარალელი გაყავს კოშის «Cours d'analyse» და ეილერის «Introductio in analysin infinitorum» და შენიშნავს, რომ შედარება ამ უფრო ადრინდელ ნაწარმოებთან ამჟღავნებს კოშის სრულებით ახალ კრიტიკულ მიდგომას [2].

ნაცვლად სპეკულატური ხასიათის მსჯელობისა უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის საფუძველზე, იმისა, რასაც ხშირად უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის მეტაფიზიკას უწოდებდნენ, კოშის დაფუძნების თეორიით იწყება ხანა მათემატიკური ანალიზის აგებისა მკაცრ და ლოგიკურად დახვეწილ საფუძველზე. კოშისაგან ფართო მასშტაბით იწყება ის, რასაც კლეინმა უწოდა მათემატიკური ანალიზის არითმეტიზაცია.

•

მართალია, კოშიზე ადრე ამავე მიმართულებით მუშაობდა ბოლცანო, აგრამ ეს მუშაობა ერთგვარად იზოლირებულ ხასიათის ატ-

---

[1] E. Borel. Leçons sur les séries divergentes, 1901, p. 2.

[2] Ф. Клейн. Лекции о развитии математики в XIX столетии, ч. I, 1937, стр. 117.

მოჩნდა და თავის დროინდელ მათემატიკაზე მნიშვნელოვანი გავლენა არ მოუხდენია. მხოლოდ შემდეგ, როცა სათანადო შედეგები მოპოვებული იყო სხვა მათემატიკოსების მიერ და მათი საშუალებით იყო განმტკიცებული მათემატიკურ მეცნიერებაში, თითონ ამ შედეგებმა ყურადღება აღძრა ბოლცანოს შრომებისადმი, რომლებშიაც მსგავსი რამ უკვე გაკეთებული იყო.

«არ იქნება გადაჭარბებული, — ამბობს კლეინი[1], — თუ კოშის ჩვენ ვუწოდებთ ფუძემდებლს უსასრულოდ მცირეთა ზუსტი ანალიზისა თანამედროვე გაგებით».

კოშის ეკუთვნის გამოთქმა და დამტკიცება ზღვართა თეორიის ძირითადი თეორემის, აგრ. წოდ. «კრებადობის პრინციპის», რომელზედაც ზემოთ იყო საუბარი (გვ. 107) და რომელიც მჭიდრო კავშირს ამყარებს ცვლადსა და მის ზღვარს შორის. ზღვარი, ნაცვლად იმისა, რომ გადაკარგული იყოს უსასრულობაში და განხილული იყოს როგორც ისეთი რამ, რასაც შეგვიძლია მხოლოდ ბევრად თუ ნაკლებად მივუახლოვდეთ, ღებულობს ლოგიკურად მისაღწევად და დასრულებულ ხასიათს. ასეთი წარმოდგენა ზღვრის შესახებ ხელს უწყობს იმას, რომ შემუშავდეს სწორი შეხედულება უსასრულოდ მცირის შესახებ და დაძლეული იყოს აქტუალური უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისი, წარმოდგენა უსასრულოდ მცირეზე, როგორც სიდიდის მდგომარეობაზე გაქრობის მომენტში და ა. შ.

იმ მიდგომის დაძლევამ, რომელიც მოსწყვეტდა უსასრულოდ მცირეებს სასრულო სიდიდეებისაგან, და ზღვართა თვალსაზრისის გატარებამ მისცა კოშის საშუალება უკეთ გაეთვალისწინა მნიშვნელობა აგრ. წოდ. საშუალო მნიშვნელობის თეორემების, რომლებზედაც ზემოთ იყო საუბარი (გვ. 116 — 117) და წამოეწია ისინი, როგორც დიფერენციალური აღრიცხვის ცენტრალური დებულებანი.

საქმე, რასაკვირველია, ისეთნაირად არ უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ კოშიმ მოგვცა მათემატიკური ანალიზის ახალი დაფუძნება ლოგიკურად სრულებით უნაკლო სახით. მისით მხოლოდ იწყება ეს დიდი საქმე, რომელსაც დასჭირდა მათემატიკოსების მთელი რიგი თაობების ხანგრძლივი მუშაობა, მაგრამ ნამდვილად ამ საქმის და ამასთანავე ფართო გაქანების დაწყება გვაქვს. თითონ თავის ძირითადი დებულება ზღვრის არსებობის შესახებ კოშის არ შეეძლო ლოგიკურად

---

[1] Ф. Клейн. Элементарная математика с точки зрения высшей, т. I, 1933, стр. 319.

სრულებით უნაკლო სახით დაემტკიცებინა, რადგან მას ჯერ არ ჰქონდა ნამდვილი რიცხვთა არითმეტიკული თეორია, ისე რომ მან მხოლოდ დაიწყო საქმე ცვლადსა და ზღვარს შორის მჭიდრო კავშირის დამყარებისა. და თითონ მისმა თეორემამ, და საზოგადოთ თეორიამ, მწვავედ გამოამჟღავნეს და დღის წესრიგში დააყენეს საჭიროება ნამდვილ რიცხვთა არითმეტიკული თეორიის შექმნის და, საზოგადოთ, მათემატიკური ანალიზის სიმრავლეთა-თეორიულ საფუძვლების მონახვისა, რათა შესაძლებელი ყოფილიყო სრული რეალიზაცია კოშის მიერ დასახულ ამოცანისა. ჩვენ თავში აღნიშნული გვქონდა, რომ მეცნიერების განვითარების პროცესში სათანადო მასალის უფრო შემდგომი ფენები ხშირად უფრო ადრე მუშავდება, ვიდრე უფრო ღრმად მდებარე ფენები. ამასვე ადგილი აქვს თითონ დაფუძნების თეორიებისათვის.

ჩვენ არ უნდა წავართვათ კოშის მათემატიკურ ანალიზის მკაცრ ლოგიკურ საფუძველზე დადგენის დიდი საქმის დაწყების ღვაწლი, მარტო იმის გამო, რომ მის მიერვე არ იყო მოცემული ნამდვილ რიცხვთა არითმეტიკული თეორია. ასეთი თეორიის აგების საქმე განახორციელეს ვეიერშტრასმა, დედეკინდმა, კანტორმა და სხ., რომლებმაც დააყრდნეს მათემატიკური ანალიზი ფართო სიმრავლეთა-თეორიულ ბაზაზე და გამოავლინეს ძირითადი მნიშვნელობა სიმრავლის ცნებისა მათემატიკის მთელ რიგ ცნებათა დადგენისათვის. ამ გზით სავსებით გარკვეული იყო მათი ნამდვილი შინაარსი.

იმ დროს, როცა წინად სათანადო ტერმინები ვერ ასწრებდნენ გაფორმებულიყვნენ როგორც ცნებანი, რომ უკვე ჩაბმული იყვნენ საანგარიშო პროცედურაში და თვით ამ უკანასკნელიდან უკანა რიცხვით უნდა შეეძინათ თავისი ხასიათი, ეხლა უკვე ყველაფერი თავის ადგილზე იყო. ჯერ განსაზღვრული იყვნენ სათანადო ცნებანი და მათზე წარმოებულ ოპერაციების შინაარსი, შემდეგ გამოყვანილი იყვნენ წესები ამ ოპერაციებისათვის და ამ გზით დადგენილი იყო გარკვეული საანგარიშო სისტემა. როცა ცნებების შინაარსის გაფორმებამდე სათანადო ტერმინები უკვე ებმებიან საანგარიშო პროცედურაში, საქმე ღებულობს ხასიათს გარკვეულ ამოცანის და მიზანდასახულების დასმისა ისეთი თეორიის შექმნის შესახებ, რომელიც სათანადო ფორმალურ მოთხოვნილებას დააკმაყოფილებდა, მაგრამ ამოცანის დასმა თითონ არ ნიშნავს დასახულ მიზნის რეალიზაციას. როცა ამ გზით უნდათ დაახასიათონ სათანადო ობიექტები, გამოდის, რომ კითხვაზე უპასუხებენ იმავე კითხვის გა-

მეორებით, და ამ დახასიათების ლოგიკურად დამაკმაყოფილებელი ხასიათი არა აქვს. და მხოლოდ სიმრავლეთა-თეორიულ მიდგომამ შესაძლებელი გახადა დასახული მიზნის ნამდვილი რეალიზაცია და მათემატიკურ ანალიზის თეორიისათვის ლოგიკურად გამართული ხასიათის მიცემა. თითონ ფორმალური აპარატი მათემატიკური ანალიზისა აქ თავის საფუძველს და გამართლებას პოულობს. ამ აპარატის ფორმალური მხარის და მისი უპირატესობების გათვალისწინება სრულებით არ მოითხოვს ფორმალისტურ თვალსაზრისზე დგომას. ეს თვალსაზრისი, პირიქით, უშლის იმას, რომ შემუშავებული იყოს სწორი შეხედულება ფორმალური მხარის შესახებ. სხვადასხვა ალგორითმების შემუშავებისათვის არ არის საჭირო თვით მათემატიკას თავიდანვე ალგორითმული ხასიათი მივცეთ და შინაარსობრივ დაფუძნებაზე უარი ვთქვათ.

მათემატიკურ ანალიზის სიმრავლეთა-თეორიულ დაფუძნებამ შესაძლებელი გახადა მიღწეული ყოფილიყო და გადაჭარბებულიც სიმკაცრის ის დონე, რომელიც საბერძნეთის მათემატიკას ახასიათებდა, კერძოთ ბერძნების მიერ შემუშავებულ ამოწურვის მეთოდს. მაგრამ ამავე დროს შენარჩუნებული იყო და გაძლიერებულიც უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის მეთოდების განსაცვიფრებელი ოპერატიულობა. სიმრავლეთა თეორიის საშუალებით შესაძლებელი გახდა იმ სიძნელეების აცდენა, რომელნიც მათემატიკურ ანალიზის ძველ დაფუძნებასთან იყო დაკავშირებული. მართალია, თითონ სიმრავლეთა თეორიის განვითარების პროცესში გამოვლინდა გარკვეული სიძნელეები და გარკვეულ წინააღმდეგობებსაც წააწყდენ და დაისვა საკითხი თითონ სიმრავლეთა თეორიის ლოგიკური დაფუძნების შესახებ. აქ უფრო გაღრმავებული და, ასე ვთქვათ, გასუფთავებული სახით კვლავ დაისვა ის ფილოსოფიური პრობლემები უსასრულობის ბუნების, კონტინუუმის აგების და სხ. შესახებ, რომლებსაც უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვასთან დაკავშირებით სვამდენ ჯერ კიდევ მისი სიმრავლეთა-თეორიულ დაფუძნებამდე.

სიმრავლეთა თეორიის სიძნელეები, რასაკვირველია, სრულებით არ ლაპარაკობს მათემატიკურ ანალიზის სიმრალეთა-თეორიულ ბაზაზე დადგენის წინააღმდეგ. ეს სიძნელეები ლაპარაკობენ დაფუძნების დარგში კვლევა-ძიების, მათემატიკის საფუძვლების ფილოსოფიურ გამოკვლევის კიდევ უფრო მეტად გაღრმავების საჭიროებაზე. მარქსის კონცეპციის განხილვა დიფერენციალურ აღრიც-

ხვის დაფუძნების შესახებ იმ მხრივაც მნიშვნელოვანია, რომ ხელს შეგვიწყობს შევიმუშავოთ სწორი წარმოდგენა სიმრავლეთა თეორიის დაფუძნების აქტუალურ საკითხების შესახებ.

III

მარქსის კონცეპცია მათემატიკის დაფუძნებისა

1. მარქსის მუშაობა მათემატიკაზე [1]

მარქსის მუშაობა მათემატიკაზე ფართო მასშტაბით დაიწყო გასულ საუკუნის სამოციან წლებში და ის ამ მუშაობას განაგრძობდა თავის ცხოვრების მთელ შემდგომ პერიოდში. ეს მუშაობა ხვდება მარქსის ცხოვრების ორ უკანასკნელ ათეულ წლის მანძილზე. მართალია, მარქსი მუშაობდა მათემატიკაზე, უმთავრესად, მისი ძირითადი სამუშაოსაგან დასვენების სახით ან ავადმყოფობის დროს, როცა მას საშუალება არ ჰქონდა განეგრძნო თავისი მუშაობა «კაპიტალზე», მაგრამ იმ ფართო გაქანების მიხედვით, რომლითაც ის ამ მუშაობას აწარმოებდა, იმ დიდი ენერგიის მიხედვით, რომელსაც ის ამ მუშაობისათვის ხარჯავდა, იმ მნიშვნელობის გათვალისწინებით, რომელსაც ის ამ მუშაობას ანიჭებდა, შეიძლება ითქვას, რომ მარქსის მეცნიერულ შემოქმედებაში და მის მეცნიერულ ინტერესების უფართოეს ასპარეზზე მათემატიკას მეტად საყურადღებო ადგილი უკავია.

მარქსმა საფუძვლიანად შეისწავლა და დააკონსპექტა ვრცელი კურსები ალგებრის, ანალიზური გეომეტრიის და დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის. დიფერენციალურ აღრიცხვამ მარქსის განსაკუთრებული ყურადღება მიიქცია, დაკავშირებით მისი ლოგიკური დაფუძნების პრობლემებთან. მთელ რიგ წერილებში ენგელსთან მარქსი იძლევა ცნობებს თავის მათემატიკაზე მუშაობის მსვლელობის შესახებ. მარქს-ენგელს-ლენინის ცენტრალურ ინსტიტუტში

---

[1] მარქსის მათემატიკურ ხელნაწერების გამოცემისათვის მოსამზადებლად მუშაობდა ბრიგადა იანოვსკაის, რაიკოვის და ნახიმოვსკაიას შემადგენლობით. მათ მიერ დაგროვებული ცნობები მოიპოვება ს. იანოვსკაიას წერილში: **О математических рукописях К. Маркса,** რომელიც თანდართული იყო მარქსის მათემატიკური ხელნაწერების რუსულ გამოცემასთან. წინამდებარე §-ში მოყვანილი ფაქტიური ხასიათის ცნობები ამოღებულია ამ წერილიდან.

არის ფოტოასლები მარქსის მათემატიკური ხელნაწერების დაახლოვებით 900 გვერდის.

მარქსის მათემატიკური ხელნაწერები ძირითადად შედგება: 1) მარქსის მიერ დამუშავებულ სახელმძღვანელოების კონსპექტებისაგან, 2) კონსპექტებიდან, რომლებშიაც შეჯამებული სახით მოცემულია მასალა ამათუიმ საკითხზე, ნახული მარქსის მიერ სხვადასხვა წყაროებში, 3) დამოუკიდებელ ნაშრომებიდან, რომელთაგან ზოგიერთები არიან მხოლოდ პირველადი მონახაზის მდგომარეობაში, ზოგიერთები უფრო დამუშავებულ მდგომარეობაში, ნაწილი ენგელსისათვის სპეციალურად გადაწერილი სახით. მარქსის დამოუკიდებელი ნაშრომები შეეხებიან, უმთავრესად, დიფერენციალურ აღრიცხვას და მის დაფუძნებას. დიფერენციალური აღრიცხვის მასალა მარქსის მიერ დაკონსპექტებულია ლაკრუას, ბუშარლას, ჰაინდის, ჰოლის, ჰემინგის[1] და სხ. კურსების მიხედვით.

მარქსის მათემატიკურ ხელნაწერებში ცენტრალური ადგილი იმ ნაწილებს ეკუთვნის, რომელნიც მათემატიკურ ანალიზის დაფუძნების პრობლემებს შეეხება. თავის მოსაზრებანი ამ საკითხებზე მარქსს გამოთქმული აქვს სახელმძღვანელოების დაკონსპექტების დროსაც, მაგრამ იმის შემდეგ, რაც მარქსის თვალსაზრისი მათემატიკურ ანალიზის საფუძვლებზე გარკვეულად ჩამოყალიბდა, ის უძღვნის ამ თვალსაზრისის გადმოცემას და დასაბუთებას მთლიან მოზრდილ ჩანაწერებს და საჭიროდ თვლის ისინი ენგელსს გააცნოს.

მარქსის მათემატიკური ხელნაწერების რუსულად გამოცემული ნაწილი შეიცავს მის ზემოხსენებულ ნაშრომებს მათემატიკური ანალიზის საფუძვლებზე. იგივე მასალა მოცემულია მარქსის მათემატიკური ხელნაწერების ქართულ თარგმანში.

უნდა ითქვას, რომ წყაროები, რომლითაც მარქსი სარგებლობდა მათემატიკის შესწავლისათვის, დგანან თვალსაზრისზე წინახანისა იმ ახალ კრიტიკულ პერიოდთან შედარებით, რომელიც კოშით იწყე-

---

[1] S. F. Lacroix. Traité du calcul différentiel et du calcul integral, II éd., révue et augméntée, 1810.

J. L. Boucharlat. Eléments du calcul différentiel et du calcul intégral.

John Hind. Principles of the Differential Calculus.

T. G. Hall. A Treatise on the Differential and Integral Calculus and the Calculus of Variations. Cambridge, 1341.

Hemming. An Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus.

ბა და აღნიშნულია სისტემატიური მუშაობით მათემატიკური ანალიზის მტკიცე ლოგიკურ საფუძველზე დადგენის საქმის რეალიზაციისათვის. ეს წყაროები, როგორც აღნიშნულია ზემოთ, იყო ლაკრუას კურსი და ამ კურსის მსგავსი სახელმძღვანელოები.

ზემოთ იყო ლაპარაკი იმ დიდ მანძილზე, რომელიც ლაკრუას კურსს აშორებს კოშის კურსიდან. მათემატიკური ანალიზის კოშის დაფუძნება მარქსისათვის უცნობი დარჩა. საზოგადოთ, ლიტერატურა, რომელიც ანალიზის ახალ დაფუძნებასთან იყო დაკავშირებული, სპეციალისტთა ვიწრო წრეში ტრიალებდა და მარქსს არ ჰქონდა შემთხვევა ამ ლიტერატურის გაცნობისა. მაგრამ მარქსის მიერ გამოყენებულ სახელმძღვანელოების ფონზე, რომელნიც სავსებით დგანან მათემატიკურ ანალიზის დაფუძნების კოშიმდე არსებულ დონეზე, კიდევ უფრო თვალსაჩინოთ სჩანს სიდიდე მარქსის მიერ გაკეთებულ საქმისა მათემატიკურ ანალიზის და, საზოგადოთ, მათემატიკის საფუძვლების ღრმა ფილოსოფიურ გადაფასების მხრივ.

2. მარქსის თვალსაზრისი ცვლადი სიდიდის შესახებ

ფუნქციის ცვალების სიჩქარის დახასიათებისათვის საჭიროა შედარებული იყოს ერთმანეთთან დამოუკიდებელ და დამოკიდებულ ცვლადების ნაზრდები. იმის შემდეგ, რაც ეს ნაზრდები ავიღეთ სასრული სიდიდების სახით, საჭირო იქნება დავძლიოთ მათი ესათუის სასრულო მნიშვნელობა, რომ, ასე ვთქვათ, დაჭერილი იყოს ცვლილების ყოველი მომენტი და დაძლეული იყოს ის უხეშობა მდგომარეობის დახასიათების მხრივ, რომელსაც გამოიწვევს ერთიმეორესთან შედარება სასრულო ნაზრდებისა. რასაკვირველია, ნაზრდები რომ თავიდანვე ნულის ტოლი მივიღოთ, მაშინ თითონ საკითხის დაყენება კარგავს აზრს. მთავარი ამოცანა იმასში მდგომარეობს, რომ მონახული იყოს გზა ნაზრდების აღების და მათი შემდგომი დიალექტიკური და არა უბრალო მოხსნის. «ჯერ მიღება სხვაობის და შერე მისი კვლავ მოხსნა მიგვიყვანს ამგვარად პირდაპირ ა რ ა ფ რ ი ს ა კ ე ნ. დიფერენციალური ოპერაციის გაგების მთელი სიძნელე (როგორც საზოგადოთ ყოველგვარი უ ა რ ყ ო ფ ი ს უ ა რ ყ ო ფ ი ს ა) სწორედ იმასში მდგომარეობს, რომ დავინახოთ რ ი თ ი განსხვავდება ის ასეთი მარტივი პროცედურისაგან და როგორ მიგვიყვანს ამიტომ ნამდვილ შედეგამდე» (მარქსი, გვ. 5 — 6).

საკითხის მოუგვარებლობას დაფუძნების მხრივ არსებულ თეორიებში მარქსის აზრით ღრმა მიზეზი აქვს ცვლადის ცნების დია-

ლექტიკური ხასიათის გაუთვალისწინებლობაში. ცვლადი წარმოდგენილი აქვთ, როგორც ცალკეულ მნიშვნელობათა, ცალკეულ მდგომარეობათა უბრალო ჯამი და თავმოყრა და უგულებელყოფილია ის წინააღმდეგობათა ერთიანობა, რომელიც თითონ ცვლადის ცნებაშია მოცემული[1]. ეს მჟღავნდება იმ დამოკიდებულებაში, რომელსაც იჩენენ ნაზრდების მიმართ. ნაცვლად იმისა, რომ x ცვლადის რაიმე მნიშვნელობასთან შედარებით აღებული იყოს რაიმე სხვა მნიშვნელობა x_1 და მერე შედგენილი იყოს ნაზრდი $\Delta x = x_1 - x$, წინასწარ აღებულია «ნაზრდი» Δx და მისი მიმატების საშუალებით აპირობენ ცვლადის აღებულ მნიშვნელობიდან სხვა მნიშვნელობებზე გადასვლას. ეს კი ცვლადს აძლევს ხასიათს ცალკეულ მნიშვნელობათა ჯამისა და აუქმებს თითონ პროცესს ცვალებისა. ასეთ პირობებში ნაზრდები, იმის შემდეგ რაც ისინი აღებულია, უკვე მოუხსნელი რჩება, ისინი, ნაცვლად იმისა, რომ ის სამსახური შეასრულონ, რომელიც მათ ევალებათ, ახალ საზრუნავს ქმნიან მათგან განთავისუფლების მხრივ და თითონვე დამაბრკოლებელი ხდებიან.» მათ გარკვეულ მიზნისათვის გამოიწვევენ და მერე თითონ არ იციან თუ მათ რა უქნან.

მარქსი მიზნად ისახავს არა მარტო შეასწოროს აღნიშნული წარმოდგენა ცვლადი სიდიდის შესახებ, არამედ ცვლადი სიდიდის ნამდვილ ბუნების გათვალისწინებით ააგოს ახალი თეორია დიფერენციალურ აღრიცხვის დაფუძნებისათვის, რომელიც თავისუფალი იქნება ძველი თვალსაზრისის სიძნელეებისაგან.

ჯერ ჩვენ უფრო დაწვრილებით განვიხილავთ მარქსის თვალსაზრისს ცვლადი სიდიდის შესახებ და მის კრიტიკას ზემოთმითითებულ წარმოდგენებისა ამ ცნების შესახებ. მარქსი ლაპარაკობს ნაზრდის უარყოფით და დადებით გამოსახულებებზე. «სხვაობა... შეიძლება ორნაირად გამოსახული იყოს: უ შ უ ა ლ ო დ როგორც ს ხ ვ ა ო ბ ა გაზრდილ ცვლადის და მის მდგომარების შორის გაზრდამდე,—და ეს არის მისი უ ა რ ყ ო ფ ი თ ი გ ა მ ო ს ა ხ უ ლ ე ბ ა—და დადებითად — როგორც ნაზრდი..., რ ო გ ო რ ც შ ე დ ე გ ი: როგორც x-ის ნ ა ზ რ დ ი მის იმ მდგომარეობისათვის, როცა ის ჯერ კიდევ გაზრდილი არაა, და ეს დადებითი გამოსახულებაა» (გვ. 69 — 70).

---

[1] რასაკვირველია, ცვლადის ცალკეული მნიშვნელობანი ერთდებიან თვით ცვლადთან არა გარეგან დამატებით დაპირისპირებაში, არამედ სწორედ თვით ცვლადის ცნებაში მოცემულია დიალექტიკური ერთიანობა მის ზოგად ხასიათის და მის ცალკეულ მნიშვნელობათა (შეად. გვ. 109).

თითონ ნ ა ზ რ დ ი ს ცნების მიხედვით, უნდა დავიწყოთ ნაზრდის უარყოფით გამოსახულებიდან, როგორც სხვაობისა ძველ და ახალ მნიშვნელობებს შორის: $\Delta x = x_1 - x$ და მერე უკვე შეგვიძლია გადავიდეთ დადებით გამოსახულებაზე და x_1 განვიხილოთ, როგორც x და Δx ჯამი: $x_1 = x + \Delta x$. «x_1 არის თითონ გაზრდილი x, მისი ზრდა განუყოფელია მისგან. x_1 არის მისი ზრდის სრულებით განუსაზღვრელი ფორმა; ეს ფორმა ანსხვავებს გაზრდილ x-ს, სახელდობრ x_1-ს, მის საწყის ფორმისაგან გაზრდამდე, x-გან, მაგრამ არ ანსხვავებს x ს თვით მისი ნაზრდისაგან. დამოკიდებულება x_1 და x შორის შეიძლება ამიტომ გამოსახული იყოს მხოლოდ უარყოფითად, როგორც ს ხ ვ ა ო ბ ა, როგორც $x_1 - x$. პირიქით, $x_1 = x + \Delta x$-ში, 1) სხვაობა გამოსახულია დ ა დ ე ბ ი თ ა დ როგორც x-ის ნაზრდი. 2) მისი ზრდა ამიტომ გამოსახულია არა როგორც ს ხ ვ ა ო ბ ა, არამედ როგორც ჯამი თითონ მისი, საწყის მდგომარეობაში + მისი ნაზრდი» (გვ. 70).

«თუმცა $x + \Delta x$-ში Δx, რაც შეეხება მის სიდიდეს, არის ისევე განუზღვრელი, როგორც თვით განუზღვრელი x ცვლადი, მაინც Δx განზღვრულია როგორც x-გან განსხვავებული, თავისთავადი სიდიდე, როგორც ნაყოფი, დედა მისის გვერდით მანამ, სანამ ის დაორსულდა». (გვ. 71).

შეიძლება ითქვას, რომ დაწყება ნაზრდის დადებითი გამოსახულებით და განხილვა x-ის ახალ მნიშვნელობისა, როგორც x-ის ძველ მნიშვნელობის და ადრევე აღებულ x-ის «ნაზრდის» ჯამისა, დაკავშირებული არის იმ თვალსაზრისთან ცვლადის შესახებ, რომელიც მას განიხილავს, როგორც ცალკეულ მნიშვნელობათა კრებულს. მარქსის კრიტიკა მიმართულია ამ ჯამის თვალსაზრისის წინააღმდეგ.

გამოკლების ოპერაცია, რომელიც შეკრების შებრუნებულ ოპერაციას წარმოადგენს, რასაკვირველია, გულისხმობს შეკრების ოპერაციას, მაგრამ სრულებით განსხვავებულ მდგომარეობას ქმნის ის, თუ რომელ ოპერაციის შესახებ დასმულია საკითხი. როცა განვიხილავთ სხვაობას $x_1 - x$ მოცემულია / x_1 და x, ხოლო ისეთ Δx რიცხვს ვეძებთ, რომელიც ჯამში x-თან გვაძლევს x_1, ხოლო ჯამის შემთხვევაში x და Δx-დან გადავდივართ $x + \Delta x$-ზე.

მე შემიძლია რაიმე a რიცხვს რაიმე b რიცხვი მივუმატო და შევადგინო $a + b$, მაგრამ მხოლოდ ამ უკვე მიღებულ რიცხვის მიმართ მე შემიძლია ვთქვა, რომ b არის ნაზრდი, როცა a-დან ამ რიცხვზე

გადავალ. არ შეიძლება შედეგს წავუსწროთ და მხედველობაში გვქონდეს a-თვის b ნაზრდის მიმატება და, სანამ $a+b$ რიცხვი შედგენილი არაა, თითონ ამ რიცხვის შედგენისათვის ადრევე გავითვალისწინოთ b, როგორც ნაზრდი. როცა ამბობენ: მიუმატოთ a-ს ნაზრდი b, ეს უნდა იყოს გაგებული როგორც შემოკლებული გამოთქმა იმისა, რომ a-ს ჯერ უმატებთ უბრალოდ b რიცხვს, შევადგენთ $a+b$ რიცხვს და შემდეგ უკვე b შეიძლება განხილული იყოს, როგორც ნაზრდი a რიცხვიდან $a+b$ რიცხვზე გადასვლისათვის. და ამ მხრივ ზემოთხსენებულ გამოთქმის ხმარება საშიში არ არის. მაგრამ თუ მას პირდაპირ მნიშვნელობით გავიგებთ, ის ლოგიკურად ყალბი მდგომარეობის გამომხატველია.

არ შეიძლება, სანამ რიცხვი დასახელებული არაა, ვილაპარაკოთ ნაზრდზე ამ რიცხვზე გადასვლასთან დაკავშირებით, ისევე, როგორც, მაგალითად, იმისათვის, რომ ვილაპარაკოთ, რომ რაიმე რიცხვი აღებულ ცვლადის ზღვარს წარმოადგენს, ეს რიცხვი უკვე განსაზღვრული უნდა იყოს, და თითონ ის თავიდანვე ვერ იქნება შემოყვანილი, როგორც ზღვარი (შეად. გვ. 99, 107 — 108).

როცა თავიდანვე ლაპარაკობენ a-თვის b ნაზრდის მიმატებაზე, რიცხვს $a+b$ მთლიანობას უკარგავენ და მას ერთიმეორეზე მიდებულ უჯრედების სახით წარმოიდგენენ.

როცა ვსვამთ საკითხს სხვაობის $x_1 - x$ შესახებ, x_1 და x საშუალებით შევადგენთ ახალ რიცხვს Δx, რომელიც x-თან ჯამში მოგვცემს x_1. მაგრამ თუ $x_1 - x$ წინასწარ გაუტოლებთ გარკვეულ Δx რიცხვს, მაშინ გამოვა, რომ ამ გზით პირველად ვსაზღვრავთ x_1-ს როგორც x-სა და წინასწარვე ნაზრდის სახით აღებულ Δx-ის ჯამს, და აქ თავს იჩენს იგივე ჯამის თვალსაზრისი, რომელზედაც ზემოთ იყო საუბარი. «თუ მივიღებთ $x_1 - x = \Delta x$, ჩვენ ვაძლევთ სხვაობას უკვე ერთნაირ თვით მისგან განსხვავებულ გამოსახულებას. ჩვენ გამოვსახავთ, თუმცაღა განუზღვრელი ფორმით, ამ სხვაობის მნიშვნელობას გარკვეულ თვით სხვაობისაგან განსხვავებულ სიდიდის სახით. მაგალითად $4-2$ არის 4 და 2 შორის სხვაობის წმინდა გამოსახულება: მაგრამ $4-2=2$ არის სხვაობა გამოსახული 2-ის საშუალებით (მარჯვენა მხარეზე) *a*) დადებითი ფორმით, მაშასადამე უკვე არა როგორც სხვაობა; *b*) გამოკლება შესრულებულია, სხვაობა გამოთვლილია და $4-2$ მაძლევს მე $4=2+2$. მეორე ორი გამოდის აქ საწყის 2-ის ნაზრდის დადებით ფორმაში, მაშასადამე ფორმაში, რომელიც პირდაპირ მოპირისპირეა სხვა-

ობის ფორმისა... უბრალო საწყისი მიღება $x_1 - x = \Delta x =$ რაიმესი სვამს სხვაობის ფორმის ადგილას მეორე, სახელდობრ ჯამის ფორმას $x_1 = x + \Delta x$...» (მარქსი, 83).

ნაზრდის მიმართ სხვაობის თვალსაზრისის წამოყენება ნაცვლად ჯამის თვალსაზრისისა, მარტო გარეგნულ ცვლილების მომასწავებელი კი არ არის, არამედ მას ღრმა პრინციპიალური მნიშვნელობა აქვს, და ის ამჟღავნებს სრულებით სხვაგვარ ფილოსოფიურ მიდგომას, კერძოთ, მათემატიკურ ანალიზის დაფუძნების საკითხებისადმი. «ფორმაში ამ მარტივ განსხვავებიდან ერთბაშად გამომდინარეობს ძირითადი განსხვავება აღრიცხვის განხილვაში...» (გვ. 84).

3. ჯამის თვალსაზრისი და მოძრაობის ცნება

ჩვენ განვიხილავთ ცვლადი სიდიდის შესახებ ჯამის თვალსაზრისის კავშირს სათანადო წარმოდგენებთან მოძრაობის და სიმრავლის შესახებ. მარქსის კრიტიკა ჯამის თვალსაზრისისა და მის მიერ ახალი თვალსაზრისის წამოყენება შეიძლება საფუძვლად დავუდვათ მთელ რიგ ძირითად პრობლემების განხილვას და გამოვიყენოთ, კერძოთ, ზოგიერთ თანამედროვე შეხედულებათა შეფასებისათვის. მართალია, სპეციალურად იმ საკითხების შესახებ, რომლებზედაც ეხლა გადავდივართ, მარქსის მათემატიკურ ხელნაწერებში პირდაპირი ხასიათის მითითება ცოტაა, მაგრამ აქ ჩვენ შეგვიძლია დავეყრდნოთ საერთო აზრს მარქსის სწავლებისა ცვლადი სიდიდის შესახებ და, საზოგადოთ, მისი კონცეპციისა და გამოვიყენოთ აგრეთვე მარქსიზმ-ლენინიზმის კლასიკოსების შრომებში მოთავსებული სხვადასხვა გამონათქვამები, რომელნიც დასახელებულ საკითხებს ეხება.

ჯამის თვალსაზრისი, როგორც აღნიშნულია ზემოთ, დაკავშირებულია ისეთ წარმოდგენასთან ცვლადი სიდიდის შესახებ, რომლის მიხედვით უკანასკნელი დაიყვანება ცალკეულ მნიშვნელობათა გროვაზე. აქ იკარგება ის, რაც სწორედ ცვლადისათვის დამახასიათებელია. ესათუის ცვლადი გამომხატველია გარკვეული სახის ზოგად ცნების, მაგ., ცვლადი, რომელიც გადის რიცხვთა მნიშვნელობებს 0 და 1 შორის, გამომხატველია 0 და 1 შორის მოთავსებულ რაიმე რიცხვის ზოგად ცნების. როცა ცვლადს წარმოიდგენენ, როგორც ცალკეულ მნიშვნელობათა გროვას, მოწყვეტენ ერთიმეორისაგან ცალკეულსა და ზოგადს. ნამდვილად, ცვლადის ცალკეულ მნიშვნელობებში მოცემულია ის ერთიანი, რაც თითონ ცვლადთან არის

დაკავშირებული. ცვლადის ცალკეული მნიშვნელობანი არ აუქმებენ ცვლადს, როგორც ასეთს; ისინი სწორედ მ ი ს ი ცალკეული მნიშვნელობები არიან. გვიანაა ცვლადის გაუქმება იმის შემდეგ, რაც მის ცალკეულ მნიშვნელობებზე ვლაპარაკობთ, და საქმის დაყვანა ცალკეულ მნიშვნელობათა გროვაზე. ცვლადის ცალკეული მნიშვნელობები ცვლადის გარეშე კი არ არიან მოცემული, არამედ მისგან განუყრელია. «ცალკეული,— ამბობს ლენინი,[1] — არ არსებობს სხვანაირად, ვიდრე იმ კავშირში, რომელსაც ზოგადისაკენ მიყავს. ზოგადი არსებობს მხოლოდ ცალკეულში, ცალკეულის საშუალებით...».

თუ ზოგადი ცალკეულის გარეშე არ არის, ეს არ ნიშნავს, რომ ზოგადი არ არსებობს. ზოგადი უნდა ვეძებოთ იქ, სადაც ის არის, და არა იქ, სადაც ის არც უნდა იყოს თავისივე ხასიათის მიხედვით.

ჩვენ ზემოთ უკვე მოვიყვანეთ ადგილი მარქსის მათემატიკურ ხელნაწერებიდან, სადაც ლაპარაკია, რომ x_1 არის თვით გაზრდილი x და მისი ზრდა მისგან განუყოფელია. ცვალება არ ნიშნავს იმის მთლიანობის დარღვევას, რაც იცვლება. პირიქით, თითონ ცვალების ცნება ამ მთლიანობას გულისხმობს, და ცვალება რომ წარმოვიდგინოთ, როგორც დაფანტვა ცალკეულ საფეხურებად, მაშინ ვერც ც ვ ა ლ ე ბ ა ზ ე ვილაპარაკებდით. როცა საგნის შეცვლაზე ვლაპარაკობთ, ეს იმავე საგანს შეეხება, და არა სხვა საგანს. ლენინი მიუთითებს ორ პრინციპზე: განვითარებისა და მთლიანობისა და აღნიშნავს «...განვითარების საყოველთაო პრინციპი უნდა შევაერთოთ, დავაკავშიროთ, შევათავსოთ საყოველთაო პრინციპთან მ თ ლ ი ა ნ ო ბ ი ს ა ქ ვ ე ყ ნ ი ს, ბუნების, მოძრაობის, მატერიის etc»[2].

სტალინის მიერ აღნიშნული პირველი ძირითადი ნიშანი დიალექტიკურ მეთოდისა[3], რომელიც მთლიანობაზე მიუთითებს, შეეხება როგორც მთელ ქვეყანას, ისე ცალკეულ საგნებს, მოვლენებს და სხ.

წარმოდგენა ცვლადზე, როგორც ცალკეულ მნიშვნელობათა უბრალო თავმოყრაზე, ენათესავება წარმოდგენას მოძრაობაზე, როგორც უძრაობის მდგომარეობათა ჯამზე. ეს შეხედულება მოძრაობაზე საკმაოდ ხაზგასმით აქვს გამოთქმული, კერძოთ, რესელს. «ჩვენ,—ამბობს ის[4] —, მთლიანად უნდა უკუვაგდოთ ცნება მოძრა-

[1] В. И. Ленин. Философские тетради, 1936, стр. 327.

[2] Ibid., 265.

[3] И. В. Сталин. Вопросы ленинизма, 1939, стр. 536.

[4] B. Russell, Principles of Mathematics, sec ed., 1938, p. 473.

ობის *მდგომარეობის* შესახებ. მოძრაობა ნიშნავს მხოლოდ განსხვავებული ადგილების დაკავებას განსხვავებულ დროს... ის არ არის გადასვლა ადგილიდან ადგილზე...». რესელი თავის თვალსაზრისს ცვალების შესახებ *სტატიკურს* უწოდებს, რადგან, როგორც ის აღნიშნავს, ის იზიარებს ძენონის შენიშვნას, რომ ისარი თავის გაფრენისას უძრავია [1]. «ვეირშტრასმა, უსასრულოდ მცირეთა განდევნით, საბოლოოდ გვიჩვენა, რომ ჩვენ ვცხოვრობთ უცვლელ ქვეყანაში და რომ ისარი თავის გაფრენის ყოველ მომენტში უძრავია. ერთად ერთი წერტილი, სადაც ძენონი, როგორც ჩანს, სცდებოდა, იყო დასკვნა... რომ, რადგან აქ ცვალება არ არის, ამიტომ ქვეყანა რომელიმე დროს ისეთივე მდგომარეობაში უნდა იყოს, რაც სხვა დროს. ეს დასკვნა არ გამომდინარეობს და ამ წერტილში გერმანელი პროფესორი უფრო მიხვედრილი აღმოჩნდა, ვიდრე გენიალური ბერძენი» [2].

ლენინი თავის ფილოსოფიურ რვეულებში ეხება ამგვარ შეხედულებას მოძრაობის შესახებ, რომელსაც იმეორებს კერძოთ ჩერნოვი, და სწერს: «მოძრაობა არის სხეულის ყოფნა გარკვეულ მომენტში გარკვეულ ადგილას, სხვა, შემდგომ მომენტში სხვა ადგილას — ასეთია პასუხი, რომელსაც ჩერნოვი იმეორებს... ჰეგელის *ყველა* «მეტაფიზიკურ» მოწინააღმდეგეების *კვალდაკვალ*. ეს პასუხი *არაა სწორი*: (1) ის აღწერს მოძრაობის *შედეგს*, და არა თვით მოძრაობას; (2) ის არ აჩვენებს, არ შეიცავს თავისში მოძრაობის *შესაძლებლობას*; (3) ის გამოსახავს მოძრაობას, როგორც *უძრაობის* მდგომარეობათა ჯამს, კავშირს ე. ი. (დიალექტიკური) წინააღმდეგობა მის მიერ არ არის მოცილებული, არამედ ჩამოხურულია, გადაწეულია, მიფარებულია, ჩამოფარდეულია» [3].

როცა მოძრაობას წარმოიდგენენ, როგორც მათემატიკურ ფუნქციას, როგორც უბრალოდ შესაბამისობას იმ ცვლადებისა, რომელნიც დროს და სხეულის მდებარეობას გამოსახავენ, ამით მახინჯდება არა მარტო მოძრაობის ცნება, არამედ თითონ ფუნქციის და ცვლადი სიდიდის ცნებებიც. ცვლადი სიდიდე ღებულობს ხასიათს ცალკეულ მუდმივ მნიშვნელობათა უბრალო თავმოყრისა.

მათემატიკას, ისევე როგორც ყოველგვარ სხვა მეცნიერებას, საქმე აქვს ცნებებთან. მაგრამ მათემატიკური ცნებები, თითონ თავის

---

[1] Ibid., 350.
[2] Ibid. 350, 347—348.
[3] В. И. Ленин. Философские тетради, стр. 268.

ხასიათის მიხედვით, დაკავშირებული არიან ერთნაირ გარეგნულ გარკვეულობის გამოთქმასთან. ამიტომ, როცა, მაგალითად, მოძრაობის ცნების დაყვანა უნდათ მათემატიკურ ფუნქციაზე, ამასში სჩანს მიდრეკილება ცნებების შინაგან ხასიათის უგულებელყოფისა და მათი შინაარსობრივობიდან გამოფიტვისა, და ამით მახინჯდება თვით მათემატიკური ც ნ ე ბ ე ბ ი ს ხასიათი და ამის შემდეგ იგივე ფუნქციის ც ნ ე ბ ა უკვე დაკარგავს უნარს მ ო ძ რ ა ო ბ ი ს პროცესის თუნდაც გარეგნული მხარის გამოთქმისა.

ცდა მოძრაობის ცნების «მათემატიზაციისა» ყალბ ხასიათს აძლევს არა მარტო მოძრაობას, არამედ მათემატიკურ ობიექტებსაც, ისე რომ მათემატიკაც არ რჩება ამის გამო მოგებული, თუნდაც სხვის ხარჯზე. ასევე, როცა ფიზიკური იდეალიზმის წარმომადგენლები ფიქრობდნენ: მატერია ქრება, რჩება მხოლოდ განტოლებანი, ამით ისინი არამცთუ ანმტკიცებდნენ მათემატიკის მდგომარეობას, არამედ, პირიქით, თითონ მათემატიკის ხასიათსაც ამახინჯებდნენ. განტოლებების საშუალებით უნდა იყოს ასახული გარკვეული მხარე მატერიალური სინამდვილისა და, როცა უკანასკნელის გაუქმება უნდათ, მაშინ განტოლებებიც ყოველგვარ მნიშვნელობას კარგავენ და ხდებიან მხოლოდ წმინდა სიმბოლოების თამაშის ასპარეზად. მათემატიკური ნიშნები, იმის ნაცვლად, რომ გარკვეულ ცნებებს აღნიშნავდნენ, თითონ იკავებენ მათ ადგილს და ხდებიან მათემატიკის თავისთავად ობიექტებად.

ფიზიკური იდეალიზმის კრიტიკა, რომელსაც ლენინი იძლევა «მატერიალიზმში და ემპირიოკრიტიციზმში», ლაპარაკობს ამავე დროს მათემატიკურ იდეალიზმის წინააღმდეგაც. მათემატიკა, მართალია, შეისწავლის სინამდვილის გარკვეულ მხარეს, მაგრამ ეს არის სწორედ სინამდვილის მხარე და არა სინამდვილისაგან მოწყვეტა.

მოძრაობის წარმოდგენა, როგორც უძრაობის მომენტთა კრებულისა, ამახინჯებს არა მარტო ცვლადი სიდიდის ცნებას, არამედ სიმრავლის ცნებასაც, რომელსაც უყურებენ როგორც სათანადოდ რეგისტრირებულ ელემენტთა თავმოყრას. სიმრავლის ყველა ელემენტების ჩამოთვლა შესაძლებელია მხოლოდ სასრული სიმრავლისათვის და ამგვარივე მიდგომის თავზე მოხვევა უსასრულო სიმრავლისათვის წარმოადგენს უსასრულო სიმრავლის ცნების დამახინჯებას. მეტის თქმაც შეიძლება. როცა სიმრავლის ზოგადი ცნება წარმო-

უდგენიათ სასრული სიმრავლის სახით, ამახინჯებენ, საზოგადოთ, სიმრავლის ცნებას და ამით ყალბ მდგომარეობაში ვარდება თითონ სასრული სიმრავლის ცნებაც, რადგან ეს უკანასკნელი სიმრავლის ცნების ზოგად ჩარჩოებში გვაქვს.[1] როცა სასრული სიმრავლეზე ვლაპარაკობთ, სიმრავლის ცნებას ვიყენებთ თავისი ზოგადი და სრული მნიშვნელობით და სიმრავლის სასრული ხასიათი წინასწარვე ვერ შეზღუდავს სიმრავლის იმ ზოგად ცნებას, რომელიც გამოყენებულია სასრული სიმრავლეზე ლაპარაკის დროს. თითონ ცნებაც საგნების თავმოყრისა გარკვეულ მთლიანობას გულისხმობს ისე, რომ სიმრავლის მთლიანობის ელემენტთა უბრალო თავმოყრით შეცვლა იმ მთლიანობასაც ვნებს, რომელსაც ამ თავმოყრას, სიმრავლის ცნების ზოგად ფონზე, ახასიათებს, როგორც გარკვეულ სახის სიმრავლესთან, სასრული სიმრავლესთან, დაკავშირებულ თავისებურებას.

[1] ყველა ელემენტთა რეგისტრაციის შესაძლებლობა სასრული სიმრავლის ხასიათთან არის დაკავშირებული, და არა ერთგვარი ლოგიკური წინამძღვარია თვით სასრული სიმრავლის ცნების შემოყვანისათვის. უსასრულო სიმრავლის ელემენტების ჩამოთვლის შეუძლებლობა არამცთუ ვნებს უსასრულო სიმრავლის არსებობას, არამედ სწორედ მის გარკვეულ თავისებურების გამომხატველია (შეად. გვ. 102—103).

4. ჯამის თვალსაზრისი და სიმრავლის ცნება

ის თვალსაზრისი სიმრავლის შესახებ, რომელიც დაკავშირებულია წარმოდგენასთან მოძრაობის შესახებ, როგორც უძრაობის მდგომარეობათა ჯამისა, შეიძლება შეფასებული იყოს, როგორც აქტუალური უსასრულობის თვალსაზრისი და ასეთნაირად იყოს დახასიათებული: განიხილავენ არა მარტო საგნების ერთობლივობას, არამედ ეს საგნები დამატებით იკრიბება და ამ გზით შედგება თვით სიმრავლე: სიმრავლის ელემენტები განსაკუთრებით გვიდემონსტრირებენ თავის შესვლას სიმრავლეში და მასში მონაწილეობას, სიმრავლის ელემენტები, ასე ვთქვათ, თავის თავად, შინაგნად რეგისტრირდებიან, თუმცა უსასრულო სიმრავლის შემთხვევაში ასეთი რეგისტრაცია «ჩვენთვის» შეუძლებელია. ჩვენ გვაქვს არა მარტო საგნების ერთობლივობა, არამედ ეს საგნები დამატებით ახდენენ სიგნალიზაციას თა-

ვის სიმრავლეში შესვლის შესახებ; ხდება განსაკუთრებული შედგენა სიმრავლისა მისი ელემენტების ერთობლივობისაგან.

«აქტუალურ უსასრულობის» თვალსაზრისისათვის სიმრავლის ელემენტების გვერდით გვაქვს ჰიპოსტაზირებულ სახით აღებული თითონ სიმრავლე, როგორც განსაკუთრებული დამატებითი შეკრებულობა სათანადო ობიექტების ერთობლივობისა. ამ შემთხვევაში გვიხდება საქმე გვქონდეს არა უბრალოდ გარკვეულ ობიექტების სიმრავლის ცნებასთან, არამედ სწორედ მყარდება გარკვეული დამატებითი დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ე ბ ა სიმრავლესა და ელემენტებს შორის, ელემენტები განსაკუთრებულად შევლენ ამავე ელემენტთა სიმრავლეში: არის, ერთი მხრით, ელემენტთა სიმრავლე და მეორე მხრით, თვით ჰიპოსტაზირებული სიმრავლე და ელემენტის ყოფნა სიმრავლეში წარმოგვიდგება როგორც განსაკუთრებული დამოკიდებულება მ ა თ შორის, ნაცვლად იმისა, რომ საქმე გვქონდეს უბრალოდ თვით ცნებასთან საგანთა გარკვეული სიმრავლისა.

უსასრულო სიმრავლის შემთხვევაში სიმრავლე, დგება რა გარკვეულ დამატებით დამოკიდებულებაში მის ელემენტებთან, წარმოგვიდგება უკვე არა როგორც უბრალოდ უსასრულო სიმრავლე, არამედ როგორც ის, რის გამოსახატავად შეგვიძლია ვიხმაროთ გამოთქმა: აქტუალური უსასრულოდ დ ი დ ი; ასეთად წარმოგვიდგება ჰიპოსტაზირებული უსასრულო სიმრავლე მისი ელემენტების მიმართ. მაგრამ თუ განსაკუთრებული დამოკიდებულება უსასრულო სიმრავლისა მისი ელემენტების მიმართ გამოიხატება აქტუალური უსასრულო დიდით, სრულებით ბუნებრივია შებრუნებული დამოკიდებულება ელემენტისა სიმრავლის მიმართ ჩავთვალოთ აქტუალურ უსასრულოდ მცირედ. ამაში უნდა მდგომარეობდეს ზოგადი აზრი აქტუალურ უსასრულოდ მცირის.

უსასრულო სიმრავლის ელემენტები თვით ჰიპოსტაზირებულ სიმრავლის მიმართ წარმოგვიდგებიან როგორც აქტუალური უსასრულოდ მცირენი. აქტუალურ უსასრულოდ მცირის ცნება, პირველ რიგში, სიმრავლეთა-თეორიულ ხასიათის არის. აქტუალური უსასრულოდ დიდი და აქტუალური უსასრულოდ მცირე კორელატური ცნებები არიან. ეს ცნებები მჭიდროდ დაკავშირებული არიან აქტუალური უსასრულობის თვალსაზრისთან და აქტუალურ უსასრულოდ მცირის ცნების სიმრავლეთა-თეორიულ ხასიათის გამოვლენის შემდეგ არ შეიძლება გაზიარებული იყოს კანტორის აზრი იმის შესა-

ხებ, რომ აქტუალური უსასრულობის არსებობა არამცთუ მოითხოვს აქტუალურ უსასრულოდ მცირის არსებობას, არამედ, პირიქით, გამორიცხავს[1].

როდესაც მაგალითად, კონტინუუმს განიხილავენ, როგორც მიღებულს აქტუალურად უსასრულოდ მცირეების დაგროვებით, ამ მიდგომისათვის ყველაზე დამახასიათებელია ზოგადი თვალსაზრისი, რომლის მიხედვით სიმრავლის მისაღებად საჭიროა მისი განსაკუთრებული შედგენა მისი სათანადო ელემენტების ერთგვარი თავმოყრის საშუალებით.

მოძრაობის განხილვა, როგორც უძრაობის მდგომარეობათა ჯამისა, ცვლადის განხილვა, როგორც მის ცალკეულ მუდმივ მნიშვნელობათა კრებულის, აქტუალური უსასრულობის კონცეპცია, «რეგისტრაციული» მიდგომა სიმრავლის მიმართ მჭიდროდ არიან ერთი მეორესთან დაკავშირებული, მათ კრიტიკას გარკვეული საერთო ხასიათი აქვს. ყველა მათ გარკვეული საერთო თვალსაზრისი ანათესავებს, რომელსაც, თუ მარქსის მიერ ნახმარ ტერმინით ვისარგებლებთ, შეიძლება ზემოთ უკვე გამოყენებული გამოთქმა: «ჯამის თვალსაზრისი» ეწოდოს.

დავიწყოთ იმ მიდგომის განხილვიდან, რომლის მიხედვით სიმრავლის შესადგენად საჭიროა განსაკუთრებული დაგროვება მისი ელემენტებისა. ნამდვილად, როცა გვაქვს გარკვეული სიმრავლე, ამით უკვე თავდება საქმე და სიმრავლის შესადგენად არ გვჭირდება განსაკუთრებული გაერთიანება მ ი ს ი ელემენტებისა. მართლაც, სხვანაირად რომ შევხედოთ საქმეს, გამოვიდოდა, რომ ს ა გ ა ნ თ ა სიმრავლის მისაღებად წინასწარ უნდა შევადგინოთ ეს სიმრავლე და ა. შ.; ეს ერთნაირად შეეხება ყოველგვარ სიმრავლეს, როგორც სასრულოს, ისე უსასრულოს. შესაძლებლობა გადავთვალოთ სასრულო სიმრავლის ელემეტები დაკავშირებულია სასრულო ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს თავისებურებასთან და არა თვით სიმრავლის ზოგადი ცნების რაიმე სხვა ხასიათის გამომხატველია სასრულო სიმრავლის შემთხვევაში, როგორც ეს წინადაც აღნიშნული იყო. სიმრავლის მიღებისათვის რომ ვუცადოთ მის დამატებით შედგენას მის ელემენტებისაგან, მაშინ უსასრულო სიმრავლის შემთხვევაში სიმრავლის შედგენას უნდა უსწრებდეს წინ მისი ნაწილების შედგენა და ა. შ.

[1] იხ. «Новые идеи в математике», № 6. Учение о множествах Георга Кантора, I, 1914, стр. 129.

უსასრულოდ. თუ სიმრავლე მიიღება მისი ელემენტების დამატებითი დაგროვების საშუალებით, სიმრავლიდან ამ ელემენტებზე გადასვლა, სიმრავლის ელემენტების განხილვა მოხდება მისი «დაყოფის» საშუალებით. ამ დაყოფას კი დასჭირდება ხელახალი დაყოფა იმისა, რაც თითონ დაყოფის შედეგად მიღებულია და ა. შ. უსასრულოდ.

თუ ავიღებთ რომელიმე მონაკვეთზე მდებარე რაიმე წერტილს, ის სწორედ ამ მონაკვეთით წარმოდგენილ სიმრავლეს ეკუთვნის და არა ამ სიმრავლის დამშლელია და მისი გამყოფი. თუ სიმრავლეს წარმოვიდგენთ, როგორც უკვე «დაყოფილს» მის ნაწილაკებად, მაინც კიდევ მათ სიმრავლეზე მოგვიხდება ლაპარაკი და ეს მხოლოდ სხვა სახის სიმრავლეს მოგვცემს, ნაცვლად იმისა, რომ აღებული სიმრავლის «დაყოფის» გამომხატველი იყოს. ასევე, როცა სიმრავლეს წარმოიდგენენ, როგორც სათანადო ერთობლიობაში შემავალ ხაზგასმულად აღებულ საგნების კრებულს, მაინც სიმრავლის ცნებას ვერ გასცილდებიან და მხოლოდ სხვაგვარად წარმოიდგენენ ამ სიმრავლეში შემავალ საგნების ხასიათს. ამასთან დაკავშირებით შეიძლება გავიხსენოთ დემოკრიტის შემდეგი მსჯელობა, რომელიც მოყავს არისტოტელს («გაჩენის და მოსპობის შესახებ», I, 2): «და აგრეთვე იმ შემთხვევაში, როცა სხეულის ნაწილებად დაყოფისას მიიღება ნახერხის მსგავსი რამ და მაშასადამე სიდიდე გარდაიქმნება რომელიღაც ახალ სხეულად, ძალაში რჩება იგივე საკითხი: როგორი მდგომარეობაა ეხლა ამ ახალ სხეულის დაყოფადობის შესახებ?»

აქტუალური უსასრულობის თვალსაზრისი სიმრავლის ჩვეულებრივ ცნებას გვერდს ვერ აუხვევს, მაგრამ ამავე დროს მას ყალბ მდგომარეობაში აყენებს. ის უგულებელყოფს იმ მთლიანობას, რომელიც თითონ სიმრავლეს, როგორც ასეთს, ახასიათებს, და უნდა ეს მთლიანობა დამატებით მიიღოს სიმრავლის ელემენტების სპეციალური დაგროვებით. მაგრამ ასეთი ფორსირება სიმრავლის მთლიანობისა წარმოადგენს მხოლოდ დაგვიანებულ მიმართვას მისდამი და მხოლოდ ამახინჯებს მის ხასიათს და ვნებს მას [1], თუ სიმრავლის

---

[1] აქტუალური უსასრულობის თვალსაზრისის ლოგიკური დეფექტურობა არ მოითხოვს იმას, რომ დავდგეთ «პოტენციალურ უსასრულობის» თვალსაზრისზე. ამ უკანასკნელ თვალსაზრისში, ძირითადად, იგივე მიდგომა მჟღავნდება, რომელიც ჩვენ ზემოთ განვიხილეთ. აქ, მართალია, გათვალისწინებულია შეუძლებლობა—საქმე გვქონდეს უსასრულო სიმრავლესთან მისი ყველა ელემენტის თავმოყრის სახით, მაგრამ იმის ნაცვლად, რომ გაკეთებული იყოს დასკვნა უსასრულო სიმრავლეზე ამგვარი წარმოდგენის მიუღებლობის შესახებ, გადადგმულია

ელემენტების გ ვ ე რ დ ი თ ფიგურირებს ჰიპოსტაზირებული სახით აღებული თითონ სიმრავლე, მაშინ ამგვარივე შევსება დასჭირდება ამ ახალ ერთობლიობასაც და ა. შ.

არ შეიძლება უსასრულობა გაგებული იყოს, როგორც უსასრულო დაყოფადობის შესაძლებლობა, რადგან მაშინ ასევე უნდა იყოს წარმოდგენილი ის უსასრულობა, რომელიც მხედველობაში აქვს, როცა უ ს ა ს რ უ ლ ო დაყოფადობაზე ლაპარაკობენ და ა. შ.

ჩვენ ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ თუ სიმრავლის მიღებას დაუკავშირებთ მის განსაკუთრებულ შედგენას მის ელემენტთა ერთობლიობისაგან, მაშინ, კერძოთ უსასრულო სიმრავლის მიმართ, სიმრავლის შედგენას უნდა უსწრებდეს მისი ნაწილების შედგენა და მივიღებთ რეგრესს უსასრულობაში [1]. ეს მსჯელობა მონათესავეა იმისა, რასაც

ნაბიჯი, რომლითაც გარკვეულ ფარგლებში მსხვერპლად მოტანილია თვით ცნება უსასრულო სიმრავლისა, შესუსტებულია მისი შინაარსი, უსასრულობა შეცვლილია უსასრულობის პოტენციით; ამ შემთხვევაში აქტუალური უსასრულობის უკუგდება დაკავშირებულია გარკვეულ ფარგლებში უარის თქმასთან თვით უსასრულო სიმრავლის ცნებაზე და ამგვარად აქტუალურ უსასრულობის თვალსაზრისი და უსასრულო სიმრავლის ცნება კვლავ ერთად რჩებიან.

უსასრულო სიმრავლე გაგებულია ელემენტების აქტუალური მონაწილეობის სახით და, მისი ერთბაშად მოცვის და შემოწვდომის შეუძლებლობის გამო, ეს შემოწვდომის აქტი შენელებულია და გაჭინაურებული. ნამდვილად მიუღებელია სწორედ ეს «რეგისტრაციული» მიდგომა უსასრულო სიმრავლისადმი; შემდეგ, არ შეიძლება უსასრულობა გავიგოთ ერთნაირი შესუსტებული სახით, როგორც უს ა ს რ უ ლ ო ბ ი ს პოტენცია.

საქმე იმაში კი არ არის, რომ გადავწყვიტოთ, რომელი თვალსაზრისი დავიკავოთ: «აქტუალური» თუ «პოტენციალური» უსასრულობისა, არამედ იმაში, რომ დავძლიოთ მათთვის საერთო «რეგისტრაციული» მიდგომა. არ უნდა ვიფიქროთ, რომ, თუ გვაქვს საქმე უსასრულო სიმრავლესთან, მაშინ ძალაშია «აქტუალური უსასრულობის» თვალსაზრისი, ხოლო, თუ გვაქვს საქმე ცვლად სიდიდესთან—«პოტენციალური უსასრულობისა». საჭიროა, ვიმეორებთ, დავძლიოთ ორივე ამ თვალსაზრისისათვის საერთო ლოგიკური ნაკლი, რომელიც იწვევს დამახინჯებას როგორც სიმრავლის, აგრეთვე ცვლადი სიდიდის ცნებისას.

[1] ასევე სიმრავლის მიღება არ შეიძლება გაგებული იყოს როგორც მისი სპეციალური «შედგენა» მის ნაწილთა სიმრავლიდან. როცა, მაგალითად, უსასრულო სიმრავლეზე ამბობენ, რომ ის უსასრულოდ დაყოფილი კი არ არის, არამედ შეიძლება უსასრულოდ დაიყოს (შეად. არისტოტელის «ფიზიკა», III, 6), ამასში ჩამალული სწორი აზრი უშუალოდ დაყოფას კი არ უნდა შეეხებოდეს, არამედ იმის გამომთქმელი უნდა იყოს, რომ ე ლ ე მ ე ნ ტ თ ა სიმრავლის ნ ა წ ი ლ ე ბ ი ს განხილვა თითონ აღებულ სიმრავლეს გულისხმობს და საქმე ისეთნაირად არ უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ თითონ ს ი მ რ ა ვ ლ ე სპეციალურად შედგენილია მისი ნაწილების ს ი მ რ ა ვ ლ ი დ ა ნ.

ვხვდებით ძენონის ერთერთ აპორიაში მოძრაობის შესახებ: მოცემული გზის გავლისათვის ჯერ უნდა იყოს გავლილი ამ გზის ნახევარი, მაგრამ მანამდე ამ ნახევრის ნახევარი და ა. შ.; ეს მსჯელობა სწორედ ამტკიცებს შეუძლებლობას იმისა, რომ მოძრაობა გაგებული იყოს, როგორც აქტუალური თავმოყრა უძრაობის მდგომარეობათა. მოძრაობა რომ ასეთნაირად წარმოდგენილი იყოს, მაშინ იმ აქტუალურ უსასრულობის შედგენას, რომელსაც მთელი გზა იძლევა, უნდა უსწრებდეს მისი ნაწილების შედგენა და ა. შ.

ძენონის მსჯელობა ობიექტურად არამცთუ ლაპარაკობს მოძრაობის ცნების წინააღმდეგ, არამედ, პირიქით, აქ ეს ცნება სწორედ გამოყენებულია და ნაჩვენებია, რომ მოძრაობა არ შეიძლება იყოს გაგებული, როგორც უძრაობის მდგომარეობათა ჯამი. სწორედ ასეთი წარმოდგენა მოძრაობის შესახებ გამოიწვევს იმ რეგრესს უსასრულობაში, რომელზედაც ზემოთ იყო ლაპარაკი.

საქმე ისე კი არ უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ თავიდანვე სავალდებულოა მოძრაობა განვიხილოთ, როგორც უძრაობის მდგომარეობათა ჯამი, და ამიტომ ძენონის მიერ მითითებული რეგრესი უსასრულობაში გამოუსავალ მდგომარეობას ქმნის. ძენონის საბუთის ობიექტური მნიშვნელობა სწორედ იმაში მდგომარეობს, რომ ის მიგვითითებს იმ ლოგიკურად ყალბ მდგომარეობაზე, რომელსაც გამოიწვევს მოძრაობის წარმოდგენა, როგორც უძრაობის მდგომარეობათა ჯამისა, და ააშკარავებს ამ წარმოდგენის ლოგიკურ მიუღებლობას. ძენონის საბუთები ნამდვილად ლაპარაკობენ არა მოძრაობის წინააღმდეგ, არამედ, პირიქით, მისი უარყოფის წინააღმდეგ, მოძრაობის უძრაობის მდგომარეობათა ჯამად შეცვლის წინააღმდეგ.

სიმრავლის შესახებ «რეგისტრაციულ» თვალსაზრისის შეფასებისათვის შეიძლება გამოყენებული იყოს ლენინის წერილი «კიდევ პროფკავშირების შესახებ», რომელშიაც ერთერთ მაგალითზე ილუსტრირებულია განსხვავება ეკლექტიკურ და დიალექტიკურ მიდგომას შორის. იღებს რა იმავე ჭიქის მაგალითს, რომელიც მოყვანილი იყო ერთერთ მოკამათის მიერ, ლენინი აღნიშნავს, რომ ეკლექტიკოსი მექანიკურად აჯამებს ჭიქის თვისებებს და ამბობს, რომ ჭიქა არის ერთის მხრით, მაგალითად, შუშის ცილინდრი, ხოლო, მეორეს მხრით, ჭურჭელი სმისათვის და ა. შ. და ამ გზით მას უნდა დააგროვოს ჭიქის თვისებათა უსასრულო სიმრავლე და მისცეს ჭიქის დახასიათება. დიალექტიკური ლოგიკა კი იღებს საგანს მის მრავალმხრივობაში, მის კავშირებში, მის განვითარებაში, მთელი ადამიანური

პრაქტიკა უნდა შევიდეს საგნის სრულ «განმარტებაში». საგანი უნდა განხილული იყოს არა აბსტრაქტულად, იმის ჩამოთვლით, თუ როგორია ის ერთის მხრით და მეორეს მხრით და ა. შ., არამედ კონკრეტულად, იმაზე მითითებით რაც აღებულ კონკრეტულ სიტუაციაში მას ახასიათებს ყოველის მხრით [1].

როცა საგნის დახასიათება დაყავთ აბსტრაქტულ შეკრებაზე ამ საგნის თვისებებისა, ამით მახინჯდება თითონ სიმრავლის ცნებაც; მაგ., აღებულ საგნის თვისებათა სიმრავლე განხილულია, როგორც ამ თვისებათა აქტუალური თავმოყრა და თითონ სიმრავლე ღებულობს «რეგისტრაციულ» ხასიათს. ასევე, როცა, მაგ., მოძრაობას განიხილავენ, როგორც უძრაობის მდგომარეობათა ჯამს, ამასთან ერთად მახინჯდება თითონ სიმრავლის ცნებაც (შეად. გვ. 180).

როგორც ვხედავთ, თითონ სიმრავლის ცნების მიმართ მჟღავნდება დიალექტიკური მიდგომის განსხვავება ფორმალურ ლოგიკურისაგან და აგრეთვე ეკლექტიურისაგან.

ზემოთ აღნიშნული იყო ის ლოგიკური სიძნელე, რომელსაც ქმნის აქტუალური უსასრულობის თვალსაზრისი: სიმრავლის დაგროვებას წინასწარ დასჭირდებოდა მის ნაწილების დაგროვება და ა. შ.. ეს საბუთი, როგორც ნათქვამი იყო, მსგავსია ძენონის ერთერთ მსჯელობისა მოძრაობის შესახებ. არსებითად ამგვარივე ხასიათი აქვს ბერკლის სათანადო საბუთს, რომელიც ნამდვილად ლაპარაკობს აქტუალური უსასრულობის და აქტუალური უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისის წინააღმდეგ.

ბერკლის კრიტიკა ისახავდა მიზნად იმის ჩვენებას, რომ მათემატიკური ანალიზის ობიექტები, პრინციპები და დასკვნები არ არის უფრო ნათლად და ზუსტად დადგენილი და გამოყვანილი, ვიდრე რელიგიის საიდუმლოებანი და სარწმუნოების დოგმები, ისე რომ მათემატიკოსს არა აქვს საბუთი, თუ მას მათემატიკის სჯერა, უარყოფითად იყოს განწყობილი რელიგიის მიმართ. ნამდვილად კი ბერკლის კრიტიკამ გამოავლინა ის სუსტი მხარეები, რომელნიც უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დაფუძნების პირველ ეტაპებისათვის იყო დამახასიათებელი.

რასაკვირველია, მათემატიკურ ანალიზის იმდროინდელ დონის ლ ო გ ი კ უ რ დეფექტებს ყველაზე ნაკლებად შეუძლია ილაპარაკოს მათემატიკურ ანალიზის ლოგიკურად მკაცრ თეორიის და ამგვარ

---

[1] В. И. Ленин. Сочинения, т. XXVI, 1932, стр. 133—136.

თეორიის შესაძლებლობის წინააღმდეგ. მათემატიკურ ანალიზის ლოგიკურად გამართული თეორია ვერ იქნება იმის პასუხისმგებელი, რაც სწორედ სათანადო ლოგიკურ მოთხოვნილებებიდან გადახვევის ფასად არის მიღებული. ამათუიმ თეორიის ლ ო გ ი კ უ რ ი განხილვა და მისი ლოგიკური ნაკლების გამოვლენა არ შეიძლება გამოყენებული იყოს, როგორც საბუთი იმისა, რომ ამ თეორიის შეფასება ლოგიკის გარეშე უნდა მოხდეს და დაუკავშირდეს სხვა თვალსაზრისს, მაგალითად რწმენისა.

ისტორიულად ბერკლის კრიტიკა მაინც სასარგებლო აღმოჩნდა, რადგან მან გაამახვილა ყურადღება დაფუძნების საკითხებზე და აიძულა მათემატიკოსები გაეძლიერებინათ ზრუნვა ამ საკითხების მოგვარებისათვის. ამასთან დაკავშირებით შეიძლება გავიხსენოთ მარქსის მათემატიკურ ხელნაწერების ადგილი, სადაც ლაპარაკია მტრულ ყვირილზე, რომელიც პირველ ხანებში ისმოდა უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის მიმართ, «რომელმაც გამოძახილი ჰპოვა მათემატიკის არმცოდნე ხალხშიც და აუცილებელი იყო იმისათვის, რომ ახლისათვის გაეკაფა გზა» (გვ. 77).

ბერკლის კრიტიკული ხასიათის საბუთები უსასრულოდ მცირის შესახებ, როგორც ზემოთ აღნიშნულია, ნამდვილად ლაპარაკობენ მხოლოდ აქტუალური უსასრულოდ მცირის და, საზოგადოთ, აქტუალური უსასრულობის თვალსაზრისის წინააღმდეგ, და მონათესავე არიან მეცნიერების და ფილოსოფიის ისტორიაში წამოყენებულ მთელი რიგი სხვა საბუთებისა, რომელნიც აგრეთვე შეიძლება გამოყენებული იყოს აქტუალური უსასრულობის თვალსაზრისის წინააღმდეგ. «მომენტების ქვეშ,—ამბობს ბერკლი[1],—ჩვენ არ შეიძლება გვესმოდეს სასრულო ნაწილაკები. ისინი არიან არა მომენტები, არამედ სიდიდეები წარმოებული მომენტებისაგან; უკანასკნელები არიან მხოლოდ წარმომშობი პრინციპები სასრულო სიდიდეების. ამბობენ, რომ უმცირესი შეცდომაც არ შეიძლება უგულებელყოფილი იყოს მათემატიკაში: რომ ფლუქსიები არიან სიჩქარეები, რომელნიც პროპორციული არიან არა სასრულო, თუნდაც რაგინდ მცირე ნაზრდებისა, არამედ მხოლოდ მომენტების ანუ ჩასახულ ნაზრდების, რომლების მხოლოდ შეფარდება და არა სიდიდე განიხილება. და ხსენებულ ფლუქსიებიდან იღებენ კიდევ სხვა ფლუქსიებს; ფლუქსიის ამ

---

[1] G. Berkeley. The Analyst or a Discourse Adressed to an Infidel Mathematician. The Works of George Berkeley, v. III, 1901, pp. 19—20.

ფლუქსიას მეორე ფლუქსიას უწოდებენ, მეორე ფლუქსიის ფლუქსიას უწოდებენ მესამე ფლუქსიას და ასე შემდეგ მე-4, მე-5, მე-6 და სხ. უსასრულობამდე... ძალიან საძნელოა შევადგინოთ ნათელი იდეა დროის უკანასკნელ ნაწილაკების ან მათგან წარმომდგარ უკანასკნელ ნაზრდებისა, და კიდევ უფრო ძნელია გავიგოთ, თუ რას ნიშნავს მომენტები ანუ ნაზრდები მიმდინარე სიდიდეების in statu nascendi, მათ ნამდვილ პირველ წარმოშობაში ანუ არსებობის დასაწყისში, სანამ ისინი სასრულო ნაწილაკები გახდებიან, და კიდევ უფრო ნაკლებად შეიძლება გავიგოთ აბსტრაქტული სიჩქარეები ამ არასრულყოფილ არსთა, რომელნიც მხოლოდ ისახებიან. მაგრამ სიჩქარის სიჩქარე — მეორე, მესამე, მეოთხე, მეხუთე და ა. შ. სიჩქარეები სჭარბობს ყოველ ადამიანურ გაგებას... საწყისი სიჩქარის საწყისი სიჩქარე — ან ჩასახული ნაზრდის ჩასახული ნაზრდი... არ შეიძლება ამის შესახებ შედგენილი იყოს რაიმე ნათელი წარმოდგენა». «რა არის ეს ფლუქსიები? ქრებად ნაზრდების სიჩქარე? და რა არის თითონ ეს ქრებადი ნაზრდები? ისინი არც სასრულო სიდიდეები არიან, არც უსასრულოდ მცირე, არც არაფერიც კი. ხომ არ შეგვიძლია დავარქვათ მათ განსვენებულ სიდიდეების აჩრდილები» (ibid., 44).

თუ სიდიდე დგება აქტუალური უსასრულოდ მცირე ნაწილაკებისაგან, თითონ ამ ნაწილაკების შედგენისათვის დაგვჭირდება ახალი უსასრულოდ მცირე ნაწილაკები და ა. შ. უსასრულოდ. სიდიდის ჩასახვას აქტუალურ უსასრულო მცირე ნაწილაკების სახით უნდა უსწრებდეს თვით მათი ჩასახვის ჩასახვა და ა. შ.. განხილვა სხვადასხვა რიგის აქტუალურ უსასრულო მცირის აქ მდგომარეობას კი არ შველის, არამედ თითონ წარმოადგენს გარკვეულ გაჭირების შედეგს — უსასრულოდ მცირემდე, რომელშიაც უნდა ვეძებოთ აღებული სიდიდის ჩანასახი, იძულებული ვიქნებით განვიხილოთ უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეები, რომლების საშუალებით ჩაისახება აღებული უსასრულოდ მცირე და ა. შ. — ისე რომ მიმართვა უმაღლეს რიგის უსასრულოდ მცირეებისადმი თითონ გამოხატავს იმ რეგრესს უსასრულობაში, რომელსაც გამოიწვევს აქტუალური უსასრულობის თვალსაზრისი, და არა რაიმე კორექტივის შემომტანია.

თუ დაისვა საკითხი სიდიდის განსაკუთრებულ ჩასახვის შესახებ აქტუალური უსასრულოდ მცირის სახით, მაშინ ასეთი საკითხი უფრო ადრე უნდა დაისვას და ა. შ.. აქ შეიძლება გავიხსენოთ ერთი ადგილი არისტოტელის «ფიზიკიდან»: «ხომ საგნის მოძრაობა ამისაგან ამასში უნდა იყოს გარკვეული რამ და არა უბრალოთ მოძრაობა და

გაჩენა?.. სწავლება ხომ სწავლების გაჩენა არ იქნება, მაშასადამე გაჩენაც არ იქნება გაჩენის გაჩენა და საზოგადოთ რაღაცის რაღაცა». «საქმე წავა უსასრულობაში, თუ მივიღებთ ცვალების ცვალებას და გაჩენის გაჩენას. მართლაც, თუ იქნება ასეთი ცვალება შემდგომში, ის უნდა იყოს წინაშიც, მაგალითად თუ გაჩნდა როდესმე უბრალო გაჩენა, გაჩნდა ჩნდებადიც; ისე რომ მაშინ არ იყო კიდევ უბრალოდ ჩნდებადი, არამედ რაღაც, ჩნდებადი როგორც რაღაც და პირველად ჩნდებადი; და კვლავ ის როდესღაც გაჩნდა, მაშასადამე მაშინაც არ იყო ჩნდებადი». აქ მოყვანილი საბუთი ლაპარაკობს არა გაჩენის ცნების, როგორც ასეთის, წინააღმდეგ, არამედ თითონ ამ ცნების გამოყენებით გამოვლინებულია ლოგიკური დეფექტურობა ამ ცნების მიმართ გარკვეულ მიდგომისა.

ამის მსგავსი ნაკლი ახასიათებს ჰეგელის სპეკულატურ ხასიათის ცდას ლოგიკის დაწყებისა. ლოგიკის ასეთ დასაწყისად ჰეგელს შესაძლებლად მიაჩნია აღებული იყოს თვით დაწყების ცნება; ამით არამცთუ გაიკვანძება ლოგიკის დასაწყისი, არამედ სწორედ ლოგიკურად ყალბი მდგომარეობაა გამოთქმული [2]. თუ დაისმება საკითხი ლოგიკის «დასაწყისის» შესახებ იძულებული ვიქნებით უფრო ადრე დავსვათ საკითხი თითონ დასაწყისის დასაწყისის შესახებ და ა. შ.; ეს თითონ დასაწყისის ცნების წინააღმდეგ კი არ ლაპარაკობს, არამედ თვით ამ ცნების შინაარსის გათვალისწინებით ნაჩვენებია ლოგიკურად ყალბი მდგომარეობა, რომელსაც ქმნის ცდა ლოგიკის ლოგიკურად «დაწყებისა».

თუ განსაკუთრებით «იწყება» თვით ლოგიკა, იწყება ისიც, რითაც ის უნდა დაიწყოს და ა. შ., თითონ მისი დაწყების შესაძლებლობა და ა. შ.. ჰეგელის მითითება დაწყებაზე თითონ დასაწყისის ცნებიდან თვით ადასტურებს ზემოთაღნიშნულ ლოგიკურ რეგრესს და წარმოადგენს ცდას მის ერთგვარი «მოშინაურების» და საკუთარი სახელით გამოთქმისა გარკვეულ დადებით გარემოების სახით. ამ მხრივ ერთგვარად დამახასიათებელია ჰეგელის წინადადება «მორიგების» მოხდენისა იმის შესახებ, რომ ლოგიკა დავიწყოთ თითონ დასაწყისიდან [3]. ასეთი მორიგება არ გვიშველის მაშინ, როცა იძულებული ვიქნებით ეს დასაწყისი სულ უკან და უკან წავწიოთ. ვინც

---

[1] Аристотель. Физика, V, 2, стр. 92, 91. შეად. Платон. Федр 245 Д (Сочинения Платона, ч. IV, 1883, стр. 51).

[2] ამ საკითხის განხილვასთან დაკავშირებით იხ. К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. IV. 1933, стр. 128 — 129.

[3] Гегель. Сочинения, т. V, 1937, стр. 57.

ლოგიკის «დაწყებას» ცდილობს — უკვე სარგებლობს ლოგიკით თუნდაც იმავე დასაწყისის ცნებასთან დაკავშირებით.

ლოგიკას ისევე, როგორც თვით ობიექტურ სინამდვილეს, სრულებით არ ესაჭიროება გარკვეული «დასაწყისის» გამოკვანძვა. ეს გარემოება არამცთუ ლაპარაკობს თვით სინამდვილის ირაციონალობაზე ან მის ირაციონალური სახით დაწყებაზე, არამედ მისი ლოგიკური ხასიათის გათვალისწინებასთან არის დაკავშირებული. ჩვენ შეგვიძლია სინამდვილის ფარგლებში სათანადო საგნების და ა. შ. დასაწყისზე ვილაპარაკოთ, მაგრამ ვერ ვილაპარაკებთ ისეთ პუნქტზე, სადაც თვით სინამდვილე ლოგიკურად «იწყება».

თუ ლოგიკა თითონ დასაწყისით ი წ ყ ე ბ ა, მაშინ ამ დასაწყისის ერთი ნაბიჯით უკან წაწევა მოგვიხდება, რომ მას საშუალება მიეცეს ლოგიკა დ ა ი წ ყ ო ს, და შემდეგ მისთვისაც დაგვჭირდება ვეძებოთ დასაწყისი დასაწყისის ცნების სახით და ა. შ.. ასეთი დასაწყისი იძულებული ვიქნებით ყოველთვის უკან გადავწიოთ. უკვე უნდა გვქონდეს დაწყების ცნება იმისათვის, რომ ლოგიკა დავიწყოთ თუგინდ იმავე დასაწყისის ცნებით. გვექნება უკვე არა ლოგიკის დასაწყისი, არამედ ის დასაწყისი, რომლითაც ლოგიკა იწყება დასაწყისით და ა. შ.; ლოგიკის დაწყება თვით დასაწყისის ცნებით მაინც უკვე ძალიან დაგვიანებული გამოვა. ასევე არ შეიძლება, მაგალითად, ყველა ცნებების გამწკრივება გარკვეული რიგით, ისე რომ თითონ რიგის ცნებას აქ პირველი ადგილი მივაკუთვნოთ. თუგინდ ეს პირველი ადგილი უკვე ადრევე გულისხმობს რიგის ცნებას.

ის, რომ ჰეგელს უხდება დაწყებამდე საქმე ჰქონდეს კვლავ დაწყებასთან, ამჟღავნებს მის თვალსაზრისის ობიექტურად არსებულ ნაკლს, და არა იმას, რომ მას არ უნდა ლოგიკის დაწყება, ისევე, როგორც, მაგალითად, თუ სიმრავლის მიმართ «რეგისტრაციულ» თვალსაზრისს უხდება სიმრავლის შედგენამდე საქმე კვლავ სიმრავლესთან ჰქონდეს, ეს გარკვეულ ობიექტურად არსებულ სიძნელეს გამოხატავს, და არა იმას, რომ ეს თვალსაზრისი არ ცდილობს სიმრავლის მიღებას მისი სპეციალური «შედგენის» საშუალებით.

დაუბრუნდეთ ისევ აქტუალური უსასრულობის თვალსაზრისს. ეს თვალსაზრისი, როგორც ზემოთ დავინახეთ, აქტუალურ უსასრულოდ მცირეებს ითხოვს. რაიმე სიმრავლე, მაგ. კონტინუუმი გაგებულია, როგორც გარკვეული სახის აქტუალურ უსასრულოდ მცირეთა დაგროვების შედეგი. ამასთან დაკავშირებით შეგვიძლია მოვიყვანოთ ერთი ადგილი ჰეგელიდან: «...რადგან წერტილების არავითა-

რი ჯამი ხაზს არ შეადგენს, ხაზების არავითარი ჯამი არ შეადგენს სიბრტყეს, ამიტომ წერტილები უკვე თავიდანვე მიღებულია, როგორც ხაზოვნური და აგრეთვე ხაზები, როგორც სიბრტყითი. მაგრამ რადგან ამასთან ერთად აღნიშნული ხაზოვნური წერტილები ჯერ არ უნდა იყვნენ ხაზები..., ამიტომ მათ წარმოიდგენენ როგორც უსასრულოდ მცირეებს»[1].

ეხლა თუ აქტუალური უსასრულოდ მცირეების გასამართლებლად იტყვიან: ჩვენ მათ ხომ პირდაპირ ნულების ტოლად არ ვთვლით, გავახსენებთ, რომ სიძნელე სწორედ იმასშია, რომ, ერთის მხრით, მათ უყურებენ, როგორც ნულებს, ხოლო, მეორეს მხრით, როგორც ისეთ სიდიდეებს, რომელიც ნულს აღემატება, და ერთ მხარეზე მითითებით, რომელიც მეორესთან ერთად სიძნელეს ქმნის, ეს მეორე მხარე არ იქნება გაუქმებული და სიძნელე თავიდან აცილებული.

აქტუალური უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისის სიძნელეები არ შეიძლება გადალახული იყოს ამ სიძნელეების ერთგვარი «შოშინაურების» ცდით, იმით, რომ გამოთქვა სუბიექტური თანხმობა ამ სიძნელეებთან შეგუებისა. «ყველაზე მცირე გადახრა ჭეშმარიტებისაგან,—ამბობს არისტოტელი («ცის შესახებ», I, 5),—მსჯელობის შემდგომ მსვლებისას იზრდება ათასის ათეულებჯერ, როგორც მაგალითად თუ ვინმე იტყვის, რომ არსებობს მინიმალური სიდიდე: ყველაზე მცირე სიდიდის შემოყვანა არყევს მათემატიკის ყველაზე დიდ საფუძვლებს».

5. აბსოლუტური თანდათანობის კონცეპცია

როგორც წინადაც აღნიშნულია, აქტუალურ უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისთან დაკავშირებულია ის შეხედულებაც, რომელიც აბსოლუტური თანდათანობის პრინციპის გაბატონებას ცდილობს. ასეთი თანდათანობის დასაცავად მას ისეთი საფეხურები სჭირდება გადასვლისათვის, რომელნიც ნულია და იმავე დროს ნულს აღემატება. აბსოლუტურ თანდათანობის პრინციპზე სავსებით ვრცელდება ის ლოგიკური ნაკლები, რომელნიც აქტუალურ უსასრულობის თვალსაზრისისათვის დამახასიათებელია. საინტერესოა, რომ ლეიბნიცი განუწყვეტლობის პრინციპის დასახასიათებლად იმგვარ მსჯელობას მიმართავს, რომელიც ძენონის მიერ გამოყენებულია გარკვეული

[1] Ibid., 351—352.

აპორიის გამოსათქმელად და ზემოთ ჩვენს მიერ უკვე განხილული იყო. «არასდროს მოძრაობა არ ჩნდება უშუალოდ უძრაობიდან და ის გადადის უძრაობის მდგომარეობაში მხოლოდ უფრო ნაკლები მოძრაობის საშუალებით, მსგავსად იმისა, რომ არასდროს არ შეიძლება გავლილი იყოს გარკვეული ხაზი ან სიგრძე, თუ წინასწარ, უფრო მცირე ხაზი არ არის გავლილი»[1].

ისევე, როგორც ძენონის მსჯელობა ამჟღავნებდა გარკვეულ რეგრესს უსასრულობაში, რომლისაკენაც მივყავდით აქტუალური უსასრულობის თვალსაზრისს, მსგავსი მდგომარეობა გვექნება აბსოლუტური თანდათანობის პრინციპისათვის. ამ პრინციპისათვის ნახტომი რაიმე გადასვლის დროს ლოგიკურ ნახტომსაც მოასწავებს. ამიტომ განვლილ გზას ლოგიკურად უფრო მცირე გზა უსწრებს და ა. შ.. ასეთ პირობებში, ნაცვლად გარკვეული დადებითი მსვლელობისა, მივიღებთ რეგრესს უსასრულობაში: განვლილ გზას უფრო მცირე გზა უსწრებს, მაგრამ უკანასკნელს კიდევ უფრო მცირე და ა. შ.; ცდა ნახტომის ლოგიკური გაუქმებისა მისი დაპატარავების საშუალებით ლოგიკურად ყალბ მდგომარეობას ქმნის. «...როგორი უსასრულოდ მცირე ნაწილაკებადაც, — ამბობს ენგელსი [2],—არ დაშალოს ბატონმა დიურინგმა თავის გადასვლა მოძრაობის სრულ არარსებობიდან საყოველთაო მოძრაობისაკენ, როგორი დიდი დროის პერიოდიც არ მიაწეროს მას, ჩვენ მილიმეტრის მეათიათასედ ნაწილადაც არ დავიძრებით ადგილიდან».

აბსოლუტური თანდათანობის თვალსაზრისისათვის არითმეტიკული სიახლოვე ლოგიკურ სიახლოვესაც მოასწავებს და შეცდომის არითმეტიკული სიდიდის შემცირება — მისი ლოგიკური მნიშვნელობის შესუსტებას, და შეცდომა აქ ერთნაირის განუწყვეტლობით ჭეშმარიტებაში უნდა გადავიდეს. ტოლობა განხილულია, როგორც უსასრულოდ მცირე განსხვავება და ამ განსხვავების არითმეტიკული სიმცირე მიჩნეულია, როგორც მისი არსებობის ლოგიკურად გაუქმების მომასწავებელი. ასეთ პირობებში საჭირო იქნება მუდამ გარდამავალი საფეხურების ძებნა, თვით აქტუალურად უსასრულოდ მცირე ნაბიჯების დანაწევრება უმაღლესი რიგის აქტუალურ უსასრულოდ მცირეებით, იმისათვის რომ უკანასკნელი მცირე ნახტომები მაინც შეუვსებელი დარჩეს.

---

[1] Лейбниц. Новые опыты о человеческом режиме, 1936, стр. 53.

[2] К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. XIV, стр. 55.

რასაკვირველია, თავისთავად სრულებით არ არის საშიში ისეთი აგებულების უსასრულო სიმრავლეების განხილვა, რომლის ყოველ ორ ელემენტს შორის ახალი ელემენტები არის მოთავსებული. მაგრამ როცა შუაში მყოფ ელემენტებს უყურებენ როგორც საშუალებას, რომელიც აახლოვებს გადასვლის აბსოლუტური თანდათანობის შესაძლებლობის განხორციელებას და ლოგიკურ ნახტომს თანდათან ავსებს, მაშინ სწორედ ლოგიკურად ყალბი მდგომარეობა შეიქმნება: აღებულ ელემენტის რაიმე მახლობელი ელემენტი არ დაგვაკმაყოფილებს, მოვინდომებთ მის შესწორებას კიდევ უფრო მახლობელ ელემენტად, იმისათვის, რომ უკანასკნელის მიმართ კვლავ მობოდიშება დაგვჭირდეს და იმის თქმა, რომ ეს კი არა, არამედ სხვა, უფრო ახლო მდგომი უნდა გვეგულისხმა და ა. შ.; როცა გადასვლისათვის ვიშველიებთ სულ ახალ გარდამავალ საფეხურებს, მაშინ ბერგსონის გამოთქმით რომ ვისარგებლოთ [1], მხოლოდ უსასრულობაში გადავდებთ იმ მომენტს, როცა დავაპირებთ ამ გადასვლაში ჩავიხედოთ.

აბსოლუტური თანდათანობის თვალსაზრისზე დგომით, ახალის გაჩენა გაუგებარი დარჩება. ამ გაჩენის ახსნისათვის სათანადო ახალი ჩვენ წინასწარვე მოცემულად უნდა ვიგულისხმოთ, ოღონდ შეუმჩნეველ დოზებში და საკითხი მხოლოდ ამ დოზების გადიდებას და შესამჩნევად გახდომას დაუკავშიროთ. მოვიყვანთ ზოგიერთ ადგილს ლენინის ერთერთ ამონაწერიდან ჰეგელის «ლოგიკის მეცნიერებიდან», რომელსაც გაკეთებული აქვს ლენინის მინაწერი: «ნახტომები!». «ამბობენ: ბუნებაში არ ხდება ნახტომები, და ჩვეულებრივი წარმოდგენა, როცა მას სურს გაიგოს რაიმე გაჩენა ან მოსპობა, გულისხმობს..., რომ გაიგებს მათ, თუ წარმოიდგენს მათ როგორც თანდათანობით გაჩენას ან მოსპობას... დაშვება გაჩენის თანდათანობაზე ეყრდნობა წარმოდგენას იმის შესახებ, რომ ჩნდებადი უკვე თავის გაჩენამდე არსებობს გრძნობიერად ან საერთოდ სინამდვილეში და მხოლოდ თავის სიმცირის გამო ჯერ არ შეიძლება აღთქმული იყოს, ისევე როგორც დაშვება მოსპობის თანდათანობაზე ეყრდნობა წარმოდგენას, რომ არარსობა ან ის სხვა, რომელიც იკავებს გამქრალის ადგილს, აგრეთვე უკვე არსებობს, მაგრამ ჯერ არ შეიძლება შენიშნული იყოს... ამით უქმდება საერთოდ თვითონ გაჩენა და მოსპობა... ხერხი გახადო გასა-

[1] А. Бергсон. Восприятие изменчивости, 1913, стр. 26.

გებად გაჩენა ან მოსპობა ცვალების თანდათანობის დაშვების საშუალებით შეიცავს ტავტოლოგიისათვის დამახასიათებელ მოწყენილობას. მას უკვე აქვს სრულებით მზად ჩნდებადი ან ქრებადი და გადააქცევს ცვალებას მხოლოდ გარეგნულ განსხვავების ცვალებად, ისე რომ ამის გამო იგი არის მხოლოდ ტავტოლოგია. სიძნელე, რომელსაც ხვდება გაგებისაკენ მიმსწრაფი ასეთი გონება, მდგომარეობს რაიმეს თვისობრივ გადასვლაში თავის სხვაში საერთოდ და თავის დაპირისპირებაში; რომ ეს სიძნელე აიცდინოს, ის ატყვილებს თავს წარმოდგენით იგივეობაზე და ცვალებაზე, როგორც რაოდენობრივის განურჩეველ, გარეგნულ ცვლაზე»[1].

ამგვარივე მიდგომას ადგილი აქვს აქტუალურ უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისისათვისაც: სიდიდე უჩინარი სახით უკვე მოცემულია მის აქტუალურ უსასრულოდ მცირე ნაწილაკებში და ამ ნაწილაკებისაგან სიდიდისაკენ გადასვლა დაკავშირებულია მხოლოდ სათანადო მონაცემების რაოდენობრივად გაძლიერებასთან (შეად. გვ. 168—169). მსგავსი მდგომარეობა გვაქვს სიმრავლის ჰიპოსტაზირების თვალსაზრისისათვის, სიმრავლის მიმართ რეგისტრაციულ მიდგომისათვის და სხ.. ამ შემთხვევაში სიმრავლის შესადგენად ადრევე მიღებულია მხედველობაში ელემენტების სათანადო ერთობლიობა; ხდება მხოლოდ დამატებითი დაგროვება ელემენტებისა, რომლების შესახებ უკვე ადრევე ნაგულისხმევია მათი მონაწილეობა სიმრავლეში. ჩვენ წინად უკვე ნათქვამი გვქონდა (გვ. 157 — 158), რომ როცა მოძრაობის, ცვალებას და ა. შ. წარმოიდგენენ, როგორც განვლილ საფეხურთა უბრალო თავმოყრას, ამით მახინჯდება არა მარტო ეს ცნებები, არამედ აგრეთვე სიმრავლის ცნებაც.

ზემოთ აღნიშნული იყო, რომ აბსოლუტურ თანდათანობის თვალსაზრისზე მდგომთათვის რაიმე რიგი თავისთავად იმავე დროს ლოგიკური თანმიმდევრობის გამომხატველია. ასეთი მიდგომა გამოიწვევს იმას, რომ მაგალითად, მთელი გზის გავლას ლ ო გ ი კ უ რ ა დ უსწრებს მისი ნახევრის გავლა და ა. შ., რაც სწორედ ამჟღავნებს ამ მიდგომის ლოგიკურ მიუღებლობას. არ შეიძლება, მაგალითად, წინა საფეხური, უკვე როგორც ასეთი, გაგებული იყოს როგორც ისეთი რამ, რაც ლოგიკურად წინ უსწრებს შემდგომს. პირიქით, ჩვენ უნდა გვქონდეს ცნება რიგისა იმისათვის,

[1] იხ. В. И. Ленин. Философские тетради, стр. 122—123; Гегель. Сочинения, т. V, стр. 434—435.

რომ ვილაპარაკოთ, კერძოთ, რიგის შესახებ ლოგიკური თანმიმდევრობის მხრივ და რიგი თავის თავად არ ნიშნავს უკვე რიგს ლოგიკური თანმიმდევრობის მნიშვნელობით. ასე რომ იყოს საქმე, მაშინ თუგინდ იმ შემთხვევაში, როცა რიგზე ვლაპარაკობთ ლოგიკურ თანმიმდევრობის მხრივ, ეს რიგი თავიდანვე უნდა გაგებული იყოს ლოგიკური თანმიმდევრობის მნიშვნელობით და ა. შ.

უნდა უკვე გვქონდეს რიგის ცნება იმისათვის, რომ ვთქვათ, რომ გარკვეული რამ ლოგიკურად წინას წარმოადგენს შემდეგის მიმართ. თუ თითონ წინა, როგორც ასეთი, უკვე ლოგიკურადაც წინ წამსწრებია და ჯერ მის შემდგომის ცნებაც არ გვაქვს, მაშინ ვერც ვილაპარაკებთ მასზე, როგორც წინაზე. ნათქვამი ისეთნაირად კი არ უნდა გავიგოთ, რომ რიგის ცნებას ლოგიკური და რაციონალური ხასიათი არა აქვს; პირიქით, თითონ რიგის ცნების ლოგიკური ხასიათი შეუძლებლად ხდის იმას, რომ რიგის ზოგადი ცნება თავიდანვე გაგებული იყოს სპეციალურად ლოგიკურ თანმიმდევრობის მიმართ გამოყენებულ რ ი გ ი ს მნიშვნელობით.

რაიმე გზის გავლასთან დაკავშირებულ მოძრაობას მთლიანი ხასიათი აქვს და სხვადასხვა მოძრაობის შემთხვევაში გვაქვს მოძრაობის ერთიანი ცნება.

თუ რაიმე გზის გავლას ლოგიკურად წინ უსწრებს, მაგალითად, ამ გზის ნახევრის გავლა, მაშინ გამოვა, რომ მთელ გზის გავლასთან დაკავშირებულ მ ო ძ რ ა ო ბ ა ს წინ უსწრებს ნახევარ გზის გავლასთან დაკავშირებული მ ო ძ რ ა ო ბ ა და ა. შ.. ეს გზები წარმოადგენენ ერთიმეორეში ჩასმულ სხვადასხვა ს ი ვ რ ც ე ე ბ ს და მოძრაობის ნაცვლად გვექნება უძლური ცდა ამ ერთიმეორეში მოთავსებულ სივრცეების რკალების გარღვევისა (შეად: გვ. 105 — 106). როცა სივრცეში მოთავსებაზე ვლაპარაკობთ, სწორედ სივრცე გვაქვს მხედველობაში და არა მისი კვლავ სივრცეში ყოფნა. აგრეთვე სიმრავლის ცნება არ ნიშნავს იმას, რომ ხდება საგანთა გარკვეულ სიმრავლის დამატებითი შეკვრა. საქმე ასეთნაირად რომ წარმოვიდგინოთ, გამოვა, რომ სიმრავლე წარმოადგენს ჩარჩოს კვლავ სიმრავლისათვის და ა. შ.

თუ განვიხილავთ უსასრულო სიმრავლის რაიმე უსასრულო ნაწილს, ეს არ ნიშნავს, რომ აქ მოცემულ სიმრავლის სახით გვაქვს სიმრავლე სიმრავლის შემდეგ ან უსასრულობა უსასრულობის შემდეგ. როცა უსასრულო სიმრავლის უსასრულო ნაწილს განვიხილავთ, აქ საქმეში მონაწილეობს უსასრულობის ერთიანი ცნება.

როცა სხეული გადავა წერტილიდან *a* წერტილზე *b*, მთელი გზა

a-დან b-მდე წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს შეიცავს და საქმე ისეთნაირად არ უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ წერტილი b გვექნება განვლილ წერტილთა უსასრულობის შ ე მ დ ე გ.

არ შეიძლება უსასრულობა, როგორც ასეთი, წარმოვიდგინოთ ნაადრევად დამთავრებული და ვილაპარაკოთ შემდგომ საფეხურებზე ტრანსფინიტურის სახით. თუ საქმეს ისე წარმოვიდგენთ, რომ უსასრულობა, უკვე ტრანსფინიტურის სახით, ამწყვდევს და კუმშავს თავის შიგნით კვლავ უსასრულობას, მივიღებთ რეგრესს უსასრულობაში და არა დადებით პროცესს სხვადასხვა საფეხურების მიღებისა. ამ გზით არამცთუ გადაიშლება «გაძლიერებული» უსასრულობა ტრანსფინიტურის სახით, არამედ თვით უსასრულობის ცნების გამოყენებით გამოაშკარავდება ამ თვალსაზრისის ლოგიკური სიყალბე: როცა რაიმე გარემოების ლოგიკური შეუძლებლობა ნაჩვენებია უ ს ა ს რ უ ლ ო ბ ა შ ი რეგრესზე მიყვანით, აქ თითონ უსასრულობის ცნებაა გამოყენებული — რეგრესი უსასრულობაში როგორც გარკვეული ლოგიკურ შეუძლებლობის მაჩვენებელი, უსასრულობის ცნების გამოყენებას გულისხმობს. ზემოთგანხილულ სიტუაციას თუ დავავალებთ განსაზღვროს ახალი უსასრულობა ტრანსფინიტურის სახით, ეს იმის მომასწავებელი იქნება, რომ თვით რეგრესს უ ს ა ს რ უ ლ ო **ბ ა შ ი** ვავალებთ უსასრულობის განსაზღვრას. უსასრულობაში რეგრესი კი, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, თვით გულისხმობს უსასრულობის ცნებას (შეად. გვ. 178—179).

ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ არ შეგვიძლია ისეთ საფეხურებზე ვილაპარაკოთ, რომლებიც წარმოადგენენ უსასრულობის «შემდგომ» გაგრძელებას. ასევე არ შეიძლება რაიმე უსასრულო სიმრავლე თითონ წარმოვიდგინოთ, როგორც ახალი და გაგრძელება მისივე ელემენტების ერთობლიობის მიმართ: ეს ერთობლიობა ვერ იქნება თავის თავისავე გაგრძელება. სიმრავლის ჰიპოსტაზირების თვალსაზრისი და ტრანსფინიტური საფეხურების თვალსაზრისი ერთიმეორის მონათესავენი არიან. ამგვარივე ხასიათი აქვს ცდას ზღვრის განხილვისა, როგორც ცვლადის მნიშვნელობების შემდგომ მყოფისა: აქ ზღვარი განხილულია, როგორც ამ მნიშვნელობათა უსასრულობის ერთგვარად დამამთავრებელი ტრანსფინიტურ ასპექტში. ამგვარი მიდგომები, როგორც ზემოთ ნაჩვენები იყო, ლოგიკურად ყალბ მდგომარეობას ქმნის და ეს მდგომარეობა იმის მსგავსია, რასაც იძლევა მოძრაობის განხილვა, როგორც უძრაობის მდგომარეობათა თავმოყრისა.

ცვლადის ზღვრისაკენ მისწრაფება ისე კი არ უნდა გავიგოთ, რომ ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ აღებული ცვლადი უნდა ერთგვარად გარდაიქმნეს ზღვრად, რომელიც ამავე დროს უსასრულობაშია გადაკარგული. როცა ცვლადის ზღვარს ვეძებთ, ეს იმას კი არ ნიშნავს, რომ უნდა მოვნახოთ ის, რაც ცვლადის ერთნაირ «ტრანსფორმაციის» შედეგს წარმოადგენს მისი უსასრულობის მიღმა გადასვლის შემდეგ, არამედ აღებულ ცვლადის საშუალებით უნდა ავაგოთ გარკვეული რიცხვი, რომელიც ჩვენ ცვლადთან სათანადო დამოკიდებულებაშია. აქ თითონ ცვლადი, როგორც ასეთი, რჩება და მას არაფერი არ «მოუდის». ამიტომ სრულებით მიუღებელია კოჰენის შემდეგი აზრი: «ზღვართა მეთოდი ზღვარის და ტოლობის განურჩევლობაზე ემყარება. ტოლობას კი ლეიბნიცის მიხედვით ჩვენ უწოდებთ უსასრულოდ მცირე უტოლობას. ამიტომ ზღვრის ცნება ასწორებს ტოლობის ცნებას, მაგრამ უსასრულოდ მცირეების დაშვებით...». «ტოლობის ელემენტარული ცნება არა იმდენად შევსებულია, რამდენადაც შესწორებულია ზღვრის ზუსტი ცნებით»[1].

ნამდვილად, რასაკვირველია, არავითარ «შესწორებაზე» ტოლობის ცნებისა ზღვრის ცნების საშუალებით ლაპარაკი არ შეიძლება. ტოლობის ცნება ყველგან გამოყენებულია თავისი ერთიანი და ზოგადი მნიშვნელობით. თითონ ზღვრის ცნების მიმართ ტოლობის ცნება, როცა ის გამოყენებულია, გამოყენებულია თავის ასეთივე ნამდვილი მნიშვნელობით. ცვლადის ზღვრისაკენ მისწრაფება არ ნიშნავს რაღაც ახალი და შესწორებული აზრით მათ «ტოლობას». თუ გავიგებთ ტოლობას ახალი შესწორებული აზრით, დაისმება საკითხი რამდენად ეს ცნება შეგვიძლია «გაუტოლოთ» ტოლობის ჩვეულებრივ ცნებას.

კოჰენის თვალსაზრისის რესელის კრიტიკის[2] საპასუხოთ ნატორპმა აღნიშნა[3], რომ რესელმა ვერ გაიგო კოჰენის აზრი და ტოლობის შესწორება ზღვრის მიერ ნიშნავს, რომ ზღვრის შემთხვევაში სათანადო მნიშვნელობა განსაზღვრულია არა ტოლობის, არამედ უტოლობათა სისტემის საშუალებით. ასეთი უკანა რიცხვით დაზუსტებული და «შესწორებული» მნიშვნელობითაც კოჰენის აზრი შემ-

---

[1] H. Cohen. Das Princip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte, 1883, S. 88—89,2.

[2] B. Russell. Principles of Mathematics, 1938, p. 340.

[3] P. Natorp. Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften, dr. Aufl, 1923, S. 222.

ცდარი რჩება. თუ ზღვრის განსაზღვრის დროს მეტნაკლებობის დამოკიდებულებას იყენებენ (ნატორპი ვერ ამჩნევს, რომ უტოლობის ცნებას და მეტნაკლებობის დამოკიდებულებას სრულებით განსხვავებული ლოგიკური ხასიათი აქვთ), ამით ტოლობა სრულებით არაა «შეცვლილი» უტოლობით. აქ უბრალოდ საქმე შეეხება სხვადასხვა ცნებების გამოყენებას. თუ საჭიროების მიხედვით ჩვენ ერთ და არა მეორე ცნებას გამოვიყენებთ, ეს არ ნიშნავს, რომ ერთი ჩასმულია მეორის ნაცვლად.

ნეოკანტიანელების მარბურგელ სკოლამ სცადა განეახლებია აქტუალური უსასრულოდ მცირეების თვალსაზრისი. მათემატიკურ ანალიზის დაფუძნების თანამედროვე დონეზე ეს გამოიყურება როგორც ანარქრონიზმი. მათემატიკოსების მხრივ ასეთმა მიდგომამ ერთსულოვანი წინააღმდეგობა გამოიწვია. ვეილი ამბობს, რომ მას პირდაპირ სასაცილოდ მიაჩნია, როცა თანამედროვე მეცნიერების პირობებში მარბურგელი სკოლა აპირობს მათემატიკური ანალიზი დააყრდნოს აქტუალურ უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისს და ამასთანავე ყოველგვარი ცდის გარეშე ამ საფუძველზე დაამტკიცოს ანალიზის თუნდაც უმარტივესი თეორემები[1]. ფრენკელი აღნიშნავს, რომ უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის მიერ განვლილი და დაძლეული შეხედულებათა რეციდივი, რომელსაც მარბურგელებთან ვხვდებით, თუ შეიძლება გამართლებული იყოს, მხოლოდ ბიოგენეტიკური კანონის დიდაქტიური მნიშვნელობით გამოყენების მოსაზრებით, და არა როგორც ახლად მოწოდებული სიკეთე[2].

უსასრულოდ მცირის არსის პრობლემის გადაწყვეტას კოჰენი და ნატორპი იმაში ხედავენ, რომ უსასრულოდ მცირე განხილული იყოს არა როგორც ექსტენსიური, არამედ როგორც ინტენსიური სიდიდე. ჰელდერი სამართლიანად შენიშნავს, რომ ეს მხოლოდ სიტყვებით თამაშია[3]. აქტუალური უსასრულოდ მცირის ცნების სიძნელე იმასთან დაკავშირებულია, რომ ის, ერთის მხრით, ნული უნდა იყოს, ხოლო მეორე მხრით, ნულზე მეტი და მითითება უსასრულოდ მცირის ინტენსიურ ხასიათზე ამ სიძნელის სხვა სახით მხოლოდ განმეორებას წარმოადგენს, და არა მის თავიდან აცდენას. თუ აქტუალური უსასრულოდ მცირე ნულია, ეს საქმის მხოლოდ ერთი მხარეა, და სიძ-

---

[1] Г. Вейль. О философии математики, 1934, стр. 12.

[2] A. Fraenkel. Einleitung in die Mengenlehre, dr. Aufl., 1928, S. 114.

[3] O. Hölder. Die mathematische Methode, 1924, S. 155—156.

ნელეს ქმნის სწორედ ამ მხარის შეერთება მეორე მხარესთან, რომლითაც გამოთქმულია ის, რომ უსასრულოდ მცირეები ნულისაგა განსხვავებულია (რათა მათ საშუალება ჰქონდეთ ერთად სასრული სიდიდე შეადგინონ). სიძნელის გადალახვა მარტო ტერმინოლოგიური გზით კი არ მოხდება, არამედ ამისათვის საჭიროა გადასვლა ცვლად სიდიდეზე და დიალექტიკური განვითარების პირობებში, ახალ საფეხურზე ასვლით, იმისი სინთეზირება, რაც ცალკეულ, ფიქსირებულ სიდიდის მიმართ ერთიმეორესთან შეუთავსებელი დარჩება.

ნატორპი ერთ რამეში მართალია: აქტუალურ უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისი დაკავშირებულია ტრანსფინიტურის თვალსაზრისთან (თუმცა ის ვერ ახერხებს ამ აზრის ნამდვილ დასაბუთებას) [1], მაგრამ ამ ორ თვალსაზრისის საერთო ბედი მათ დაკანონებაში კი არ უნდა მდგომარეობდეს, არამედ მათ უკუგდებაში.

ჩვენ ზემოთ ნაჩვენები გვქონდა ის კავშირი, რომელიც არსებობს აქტუალურ უსასრულოდ მცირის და აბსოლუტური თანდათანობის კონცეპციებს შორის. ეს გარემოება მჟღავნდება განსახილველ შემთხვევაშიაც. ნატორპი აღნიშნავს, რომ განუწყვეტლობა წარმოადგენს აზროვნების უკანასკნელ ძირითად კანონს (გვ. 187) და კოჰენთან ერთად აცხადებს, რომ უსასრულოდ მცირეთა საშუალებით ზუსტად ჩამოყალიბებულია საკითხი და გაცემულია პასუხი აზროვნების მნიშვნელობის შესახებ, როგორც ყოფიერების წარმომქმნელისა (გვ. 218—219). ზემოთ შესრულებული საერთო კრიტიკა აქტუალურ უსასრულოდ მცირის და აბსოლუტურ თანდათანობის თვალსაზრისისა ამ შემთხვევაშიაც სავსებით ძალაში რჩება.

მათემატიკური საგნების ნამდვილი ბუნება არამცთუ იძლევა რაიმე დასაყრდენს მარბურგელ სკოლის თვალსაზრისისათვის, არამედ, პირიქით, უკანასკნელი სწორედ ამახინჯებს მათემატიკური ობიექტების ხასიათს. ცდა სინამდვილის ერთგვარ მათემატიზაციის ყალბ მდგომარეობაში აყენებს თითონ მათემატიკას და ამით მათემატიკა მოგებული ვერ დარჩება (შეად. ზემოთ გვ. 157). ლენინი თავის «მატერიალიზმში და ემპირიოკრიტიციზმში» ეხება კოჰენის წინადადებას ისწავლებოდეს უმაღლესი მათემატიკა სკოლებში, რათა ამით მოწაფეებში დაინერგოს იდეალიზმის სული, რომელსაც სდევნის ჩვენი მატერიალისტური ეპოქა — იდეალიზმის მიზნებისათვის მათე-

[1] Natorp., ibid., 170.

მატიკის ექსპლოატაციის ამ ცდის შესახებ ლენინი აღნიშნავს, რომ ეს არის რეაქციონერის ცრუ ოცნება [1].

კოშენი და მისი მიმდევრები ცდილობენ აღადგინონ მათემატიკური ანალიზის დაფუძნების მიერ უკვე გადალახული შეხედულებები და მისცენ მათ თავის ფილოსოფიისათვის სასარგებლო ინტერპრეტაცია. ეს შეხედულებანი თავის დროზე, როცა უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვა პირველ ნაბიჯებს აკეთებდა და მისი დაფუძნების თეორია ჯერ კიდევ საკმაოდ დამუშავებული არ იყო, აუცდენელ იყვნენ მეცნიერების განვითარებისათვის, თავისი ისტორიული როლი შეასრულეს და პოტენციალურად გულისხმობდნენ დაფუძნების შემდგომ განვითარებას და შეიცავდნენ მომავლის ჩანასახებს (იხ. გვ. 135), მაგრამ დღევანდელ მეცნიერების პირობებში, როცა უკვე ძალიან დიდი გზაა განვლილი მათემატიკური ანალიზის და, საზოგადოთ, მათემატიკის საფუძვლების დამუშავების მხრივ, ამ შეხედულებების აღდგენის ცდას რეაქციული ხასიათი აქვს და საკვირველი არაა, რომ ეს ცდა რეაქციულ იდეოლოგიას ემსახურება.

6. კინემატოგრაფიული წარმოდგენა ცვლადისა და მოძრაობის შესახებ

აქტუალური უსასრულობის თვალსაზრისი, როგორც ზემოთ დავინახეთ, დაავადებულია უსასრულობაში რეგრესით. ეს რეგრესი, რასაკვირველია, ყველაზე ნაკლებად ლაპარაკობს თითონ უსასრულობის ცნების წინააღმდეგ. პირიქით, რეგრესი უ ს ა ს რ უ ლ ო ბ ა შ ი, როგორც გარკვეული ლოგიკური შეუძლებლობის მაჩვენებელი, თითონ გულისხმობს უსასრულობის ცნებას. იმისათვის, რომ საქმეს ემუქრებოდეს და ლოგიკურად შეუძლებელ მდგომარეობას ქმნიდეს ის გარემოება, რომ იძულებული იქნებიან საქმის დაწყება სულ უკან წასწიონ უსასრულოდ, უნდა გამოყენებული იყოს თითონ უსასრულობის, როგორც ასეთის, ცნება, ისე რომ თვით უსასრულობა ყველაზე ნაკლებად შეიძლება დაავადებული იყოს უ ს ა ს რ უ ლ ო ბ ა შ ი რეგრესით (შეად. გვ. 174). რესელს მოყავს ძენონის ზემოთგანხილული საბუთი მოძრაობის წინააღმდეგ და აღნიშნავს, რომ აქ უსასრულო მთელის ცნებაში დანახულია უსასრულობაში რეგრესი [2].

---

[1] В. И. Ленин. Сочинения, т. XIII, 1931, стр. 252.

[2] B. Russell. Principles of Mathematics, § 328, p. 348.

იმ საბუთებს შორის, რომელნიც შეიძლება გამოთქმული იყოს თითონ უსასრულობის უსასრულობაში რეგრესისაგან დაცვისათვის, რესელი მთავარს ვერ ამჩნევს, სახელდობრ იმას, რომ, როგორც ზემოთ აღნიშნულია, თითონ რეგრესი უსასრულობაში, როგორც გარკვეული ლოგიკური შეუძლებლობის მაჩვენებელი, წინასწარვე დადებითი სახით გულისხმობს უსასრულობის ცნებას.

ასევე ძენონის საბუთებში მოძრაობის შესახებ წინასწარ გამოყენებულია მოძრაობის ცნება და უკვე გვიანაა ეს საბუთები შევაფასოთ, როგორც მიმართული თითონ მოძრაობის ცნების წინააღმდეგ.

ეხლა შეიძლება თქვან, რომ ძენონის საბუთებში მოძრაობა და უსასრულობა პირობით არის დაშვებული იმისათვის, რომ შემდეგ ამ დაშვების სიყალბე იყოს ნაჩვენები. ამაზე ვუპასუხებთ, რომ ძენონის არგუმენტებში მოძრაობის და უსასრულობის ცნებები ადრევე გამოყენებულია თითონ სათანადო პირობითი მსჯელობის შესასრულებლად. მართლაც, ის, რასაც ძენონის მსჯელობა ობიექტურად ასაბუთებს, შეიძლება ასეთნაირად გამოითქვას: თუ მოძრაობას წარმოვიდგენთ როგორც უძრაობის მდგომარეობათა ჯამს და უსასრულობას—როგორც აქტუალურ დაგროვებას სათანადო ელემენტების, მაშინ მ ო ძ რ ა ო ბ ა ს მთელი გზის გავლისთვის ლოგიკურად უნდა უსწრებდეს მ ო ძ რ ა ო ბ ა ამ გზის ნახევრის გავლისათვის და ა. შ., შედგენას აღებულ უ ს ა ს რ უ ლ ო ბ ი ს ა უნდა უსწრებდეს ლოგიკურად მისი უსასრულო ნაწილების შედგენა და ამ გზით მივიღებთ უ ს ა ს რ უ ლ ო ბ ა შ ი რეგრესს. აქ მოძრაობის და უსასრულობის ცნებები სწორედ გამოყენებულია და არა ხდება დროებით პირობითი დაშვება იმისა, რომ მოძრაობა მართლაც მოძრაობაა და უსასრულობა მართლაც უსასრულობაა. ნამდვილად შემოწმებისათვის აღებულია მხოლოდ გარკვეული წარმოდგენები მოძრაობის და უსასრულობის შესახებ და ამ წარმოდგენების სიყალბეა ნაჩვენები თითონ მოძრაობის და უსასრულობის ცნებების გამოყენებით.

ლოგიკურ სიძნელეს თითონ მოძრაობის ცნება კი არ ქმნის, არამედ, ბერგსონის ტერმინს თუ ვიხმართ, «კინემატოგრაფიული» წარმოდგენა მოძრაობის შესახებ. მაგრამ საქმე ისეთნაირად კი არ უნდა გავიგოთ, რომ მოძრაობის ცნებას, როგორც ასეთს, «კინემატოგრაფიული» ხასიათი აქვს და ამიტომ მოძრაობა მხოლოდ ინტუიტიურად შეიძლება დაჭერილი იყოს, როგორც ამას ბერგსონი ფიქ-

რობს[1], არამედ სათანადო კრიტიკის მთელი აზრი იმასში მდგომარეობს, რომ მოძრაობის ც ნ ე ბ ა ს არ შეიძლება «კინემატოგრაფიული» ხასიათი ჰქონდეს. ამას გვეუბნება სწორედ მოძრაობის ცნების ხასიათის გათვალისწინება. თუ «კინემატოგრაფიულ» წარმოდგენის უკუგდებასთან ერთად მოძრაობის ცნებასაც უკუვაგდებთ, ამით სწორედ გავიზიარებთ «კინემატოგრაფიულ» წარმოდგენას მოძრაობის ცნების შესახებ[2].

თითონ მოძრაობას რომ «კინემატოგრაფიული» ხასიათი ჰქონდეს, მაშინ დაბრკოლდებოდა თვით კინემატოგრაფის მუშაობა, რომელიც სწორედ მოძრაობას გულისხმობს თავისი ნამდვილი ბუნებით. ასევე, თუ მოძრაობას, როგორც ასეთს, სტატიკურად გავიგებთ, (ასეთად ახასიათებს თავის თვალსაზრისს, მაგ., რესელი, იხ. გვ. 156), მაშინ ადგილი არ დარჩება თითონ სტატიკისათვის, რომელიც მოძრაობის ცნებას გულისხმობს და მოძრაობის თეორიის ფარგლებშია მოთავ-

---

[1] H. Bergson. L'évolution créatrice, 1914, p. 331—332.

[2] მოძრაობის ცნება და მოძრაობის მთლიანობა არ მოითხოვს მოძრაობის ერთგვარ ჰიპოსტაზირებას და მის მოწყვეტას მოძრავ სხეულიდან, რომელიც გარკვეულ გზას გადის. მთლიანობა სწორედ ამ გარკვეულ გზ ის გამავალ სხეულის მოძრაობაშია. ის, რომ გზის ნაწილებზე შეგვიძლია ვილაპარაკოთ, მოძრაობას მთლიანობას არ უკარგავს. მოძრაობის ცნება არამცთუ ითხოვს იმას, რომ უარი ვთქვათ საგანზე, რომელიც მოძრაობს, არამედ ამის გარეშე ვერც ვილაპარაკებთ რაიმეს მოძრაობაზე. ბერგსონისათვის მოძრაობას მოძრავი სხეული არ სჭირია, მოძრაობა თითონ მოძრაობას შეეხება და ის მოძრაობის მოძრაობას წარმოადგენს (იხ. А. Бергсон. Восприятие изменчивости, 1913, стр. 28—30).

მოძრავი საგნის არსებობა არამცთუ აუქმებს ან აჩერებს ამ მოძრაობას, არამედ სწორედ მ ი ს მოძრაობაზეა ლაპარაკი.

თუ აღებული მოძრაობა თითონ არის ის, რაც მოძრაობს, მაშინ ჯერ კიდევ გრძელდება მოძრაობის საგნის გაფორმება, და უკვე მ ი ს მოძრაობაზე ვერ ვილაპარაკებთ. ცდა საგნის მოძრაობის წარმოდგენისა, როგორც ამ მოძრაობის მოძრაობისა ლოგიკურ რეგრესის მდგომარეობას ქმნის (შეად. წინადმოყვანილი მსჯელობა არისტოტელისა, გვ. 166 — 167).

ასევე არ შეიძლება იყოს წარმოდგენილი მოძრაობა, როგორც ცალკეულ მდებარეობათა თავმოყრა პლუს მოძრაობის ცნებაში მოცემული მთლიანობა. ეს მთლიანობა გარედან კი არ ემატება მოძრაობის კვალს, არამედ ის თვით მოძრაობის პროცესთან არის განუყრელი, რომელიც სწორედ ა რ შეიძლება წარმოდგენილი იყოს როგორც ცალკეულ გაფანტულ მდგომარეობათა ჯამი. თუ მოძრაობას განვიხილავთ როგორც ჯამს ცალკეულ მდებარეობათა კრებულის და მთლიანობის იდეისა, მაშინ კვლავ დადგება საკითხი ამ ჯ ა მ ი ს ა თ ვ ი ს მთლიანობის მიმატებისა და ა. შ. (შეად. გვ. 161 — 162).

სებული. რესელისათვის უსასრულოდ მცირეების განდევნა იმის სასარგებლოდ ლაპარაკობს, რომ ცვალებას, როგორც ასეთს, ადგილი არა აქვს (იხ. გვ. 156). ნამდვილად კი, როგორც ჩვენ ზემოთ დავინახეთ, ცდა ცვალებისა და მოძრაობის უარყოფისა მჭიდროდ არის დაკავშირებული აქტუალურ უსასრულოდ მცირის თვალსაზრისთან.

მოძრაობა არამცთუ არ შეიძლება გაგებული იყოს როგორც უძრაობის მდგომარეობათა ჯამი, არამედ უძრაობის ცნება თითონ გულისხმობს მოძრაობის ცნებას. ასევე, ცვლადი სიდიდე არ შეიძლება გაგებული იყოს, როგორც მუდმივ მნიშვნელობათაგან შემდგარი. პირიქით, თითონ მუდმივის ცნებას ცვლადის ცნება ესაჭიროება.

თუ ავიღებთ რაიმე რიცხვს, მაგ. 5-ს, არავითარი აზრი არა აქვს ლაპარაკს იმაზე, რომ ის მუდმივი სიდიდეა. 5-თან დაკავშირებული მუდმივი სიდიდე თითონ რიცხვი 5 კი არ არის, არამედ ის, რითაც გამოთქმულია ამ რიცხვის შენარჩუნება. დასმულ საკითხზე პასუხს არ იძლევა რიცხვი 5, რადგან საკითხი სწორედ მ ი ს შენარჩუნებას შეეხება. მუდმივი სიდიდის ცნება მხოლოდ ასეთი შეიძლება იყოს. რაიმე ცვლადის სხვადასხვა მნიშვნელობას ეთანადება ერთიდაიგივე რიცხვი და ეს რიცხვი სწორედ შენარჩუნებული იქნება ცვლადის ერთი მნიშვნელობიდან სხვა მნიშვნელობებზე გადასვლისას. მაგრამ ეს იმას ნიშნავს, რომ მუდმივი სიდიდე განხილული იქნება როგორც გარკვეული ხასიათის და სწორედ ისეთი ფუნქცია, რომლისთვისაც არგუმენტის სხვადასხვა მნიშვნელობებს ერთიდაიგივე რიცხვი ეთანადება. მაგალითად, მუდმივი სიდიდე 5 წარმოდგენილი იქნება ისეთი ფუნქციებით, რომელთაც არგუმენტის სხვადასხვა მნიშვნელობას ეთანადება ერთიდაიგივე რიცხვი 5. ჩვენ უნდა განვასხვავოთ ერთი მეორისაგან ცნება რიცხვისა 5 და მუდმივი სიდიდისა 5. მუდმივი სიდიდის 5-ის შემთხვევაში სხვადასხვა იქნება არა თითონ რიცხვი ხუთი, არამედ არგუმენტის მნიშვნელობანი, რომლებსაც ეს რიცხვი 5 ეთანადება, წყვილები (x, 5), რომლების განსხვავებულობისათვის საკმარისია პირველი კომპონენტების განსხვავებულობა. მუდმივი სიდიდის 5 შემთხვევაში არგუმენტის თითოეულ მნიშვნელობას ეთანადება რიცხვი 5 და არა იგივე მუდმივი სიდიდე 5 (ამ მუდმივ სიდიდეს თითონ ჩვენი თანადობა იძლევა).

ეხლა ცხადი უნდა იყოს, თუ რამდენად არაა მართებული ასეთი, ფართოდ გავრცელებული თანმიმდევრობა მასალის დალაგებისა მათემატიკურ ანალიზის კურსებში. ჯერ განხილულია მუდმივი სიდი-

დეები, შემდეგ ცვლადი სიდიდეები, რომელნიც გადიან მუდმივ სიდიდეების მნიშვნელობებს, და ამგვარ სიდიდეებთან დაკავშირებით შემოყვანილია ფუნქციის ცნება. ნამდვილად მუდმივ სიდიდეებზე მხოლოდ იმის შემდეგ შეიძლება ლაპარაკი, რაც ფუნქციის ცნება შემოყვანილია.

თუ განვიხილავთ, მაგალითად, ცვლადს, რომელიც ყველა ნამდვილ რიცხვთა მნიშვნელობებს გადის, ამ ცვლადის მნიშვნელობანი იქნება, მაგალითად, რიცხვები 5, $\frac{1}{2}$, π და სხვ., და არა მუდმივი სიდიდეები 5, $\frac{1}{2}$, π და სხ.. ჩვენ შეგვიძლია, რასაკვირველია, ისეთი ზოგადი ცნება განვიხილოთ — ისეთი «ცვლადი», რომლის ცალკეული მნიშვნელობანი თითონ იქნებიან ფუნქციები, მაგალითად, შეგვიძლია ისეთი ცვლადი განვიხილოთ, რომლის მნიშვნელობანი იქნებიან მუდმივი სიდიდეები ამათუიმ ნამდვილ რიცხვით წარმოდგენილი, მაგრამ ამით იმავე ცვლადს კი არ გავიმეორებთ, რომელიც ნამდვილ რ ი ც ხ ვ თ ა მნიშვნელობებს გადის, არამედ მივიღებთ ა ხ ა ლ ცვლადს. მაგრამ ამ ახალ ცვლადის ესათუის მნიშვნელობა, ამ შემთხვევაში სათანადო სახის ფუნქცია, არ უნდა იყოს თავის მხრივ განხილული, როგორც «მუდმივი» თითონ ამ ცვლადის თვალსაზრისით, ე. ი. როგორც ისეთი სახის ფუნქცია, რომლის არგუმენტის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის შ ე ნ ა რ ჩ უ ნ ე ბ უ ლ ი ა ერთიდაიგივე ფ უ ნ ქ ც ი ა, ჩვენს შემთხვევაში მუდმივი სიდიდე. თუ განვიხილავთ ცვლადს, რომელიც უკვე ასეთი ხასიათის ფუნქციებისაგან შესდგება, ეს კვლავ ახალი ცვლადი იქნება და ა. შ.. ამგვარად, რაიმე ცვლადის მნიშვნელობანი არ შეიძლება განხილული იყვნენ, როგორც მუდმივი, ამავე ცვლადის ასპექტში.

როცა ცვლადის ამათუიმ მნიშვნელობას განვიხილავთ, ეს არ ნიშნავს, რომ თითონ ცვლადი გადაიქცა იმ მნიშვნელობად, მასზე შეჩერდა. ცვლადი და მისი მნიშვნელობანი ერთიმეორისაგან განუყრელია. მისი ესათუის მნიშვნელობა სწორედ ც ვ ლ ა დ ი ს მნიშვნელობაა, და არა ის, რაც ცვლადის ნაცვლად ჩ ა ს მ უ ლ ი ა და მის ადგილს იკავებს. ცვლადი გვევლინება მისი მნიშვნელობების სახით და მისი ესათუის მნიშვნელობა თითონ ამ ცვლადს არ აუქმებს.

ჩვენ ამგვარად ვხედავთ, რომ ცვლადი არ შეიძლება გაგებული იყოს როგორც ა მ ცვლადის მუდმივ მნიშვნელობათა ჯამი, და საქმე ისე არ უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ ცვლადი ერთგვარად შეჩე-

რებულია მის თითოეულ მნიშვნელობაზე. ასევე მოძრაობა არ უნდა გავიგოთ, როგორც უძრაობის მდგომარეობათა ჯამი და საქმე ისე არ უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ მოძრავი სხეული მოძრაობის თითოეულ ადგილზე შეჩერებულ მდგომარეობაშია. ძენონის ერთერთ აპორიაში გამოთქმული მსჯელობა, რომ, რაკი მოძრავი სხეული სხვადასხვა ადგილებშია, თითოეულ მომენტში ის შეჩერებულია სათანადო ადგილში, შემცდარია იმ მხრივ, რომ უძრაობაზე შეიძლება ლაპარაკი მხოლოდ დროში და არა ამათუიმ მომენტში, ისევე როგორც მუდმივი სიდიდე ესათუის რიცხვი კი არ არის, არამედ ფუნქცია, რომელშიაც დამოუკიდებელ ცვლადს ერთი და იგივე რიცხვი ეთანადება და ა. შ.. უკვე არისტოტელმა აღნიშნა, რომ «უძრაობა ნიშნავს გარკვეულ დროის განმავლობაში ერთსადაიმავე მდგომარეობაში ყოფნას... (ჩვენ მაშინ ვლაპარაკობთ უძრაობაზე, როცა სწორი იქნება ვთქვათ, რომ რაიმე ერთ და სხვა «ეხლა» - შიც სხეული რჩება იმავე მდებარეობაში...)». «მომენტში «ეხლა» ცვლადი ყოველთვის არსებობს რაიმე მიმართებით, მაგრამ არა უძრავადაა (რადგან მომენტში «ეხლა» არ შეიძლება არც მოძრაობა და არც უძრაობა...), დროში კი ის არ შეიძლება უძრაობის მდგომარეობაში იყოს, რადგან მაშინ გამოდის, რომ ის, რაც გადაინაცვლება, უძრავადაა»[1].

ძენონის მსჯელობების გარჩევა სწორედ გვარწმუნებს, რომ მოძრაობა არ შეიძლება გაგებული იყოს, როგორც უძრაობის მდგომარეობათა ჯამი. ლენინს თავის ფილოსოფიურ რვეულებში სათანადო ადგილი ჰეგელის «ლექციებიდან ფილოსოფიის ისტორიაში» ასეთნაირად ჩანიშნული აქვს: «....გასროლილი ისარი უძრავია». და არისტოტელის პასუხი: შეცდომა დაშვებიდან ვითომდაც დრო შესდგება ცალკეულ ეხლასაგან»[2].

როცა მოძრაობას განიხილავენ, როგორც უძრაობის მდგომარეობათა ჯამს, საქმეს ვერ უშველის მითითება გარდამავალ მდებარეობაზე, რომლების საშუალებით აპირობენ ერთ მდებარეობიდან მეორეზე გადასვლას. «როცა ჩვენ გვინდა გავერკვიოთ მოძრაობაში, ჩვენ ვამბობთ, რომ სხეული იმყოფება ერთ ადგილას და მერე მიდის მეორე ადგილას. მოძრაობის დროს ის უკვე არ იმყოფება პირველ ადგილას, მაგრამ ამასთან ერთად ჯერ კიდევ არ იმყოფება მეორე ადგილას; ის რომ იმყოფებოდეს რომელიმე ერთ ამ ადგილთაგანს,

---

[1] Аристотель. физика, 1936, VI, 8, стр. 119.

[2] В. И. Ленин. Философские тетради, стр. 268.

ის უძრავი იქნებოდა. მაგრამ სად ი მ ყ ო ფ ე ბ ა ის? თუ ვიტყვით, რომ ის იმყოფება ამ ორ ადგილს შორის, ამით ნამდვილად არაფერი იქნება ნათქვამი, რადგან ასეთ შემთხვევაში ის კვლავ ერთ ადგილას იქნებოდა, და ჩვენს წინ იგივე სიძნელე გაჩნდებოდა»[1].

მითითება გარდამავალ მდებარეობებზე არამცთუ ამსუბუქებს საქმეს, არამედ თითონ გამოთქვამს იმ ლოგიკურ სიძნელეს, რომელშიაც ვარდება ზემოთგანხილული თვალსაზრისი: ერთი უძრავ მდგომარეობიდან მეორეში გადასასვლელად საჭირო იქნება ადრე მოშველიება მათ შორის მოთავსებულ რაიმე უძრავ მდგომარეობის, მაგრამ მანამდე კიდევ უფრო ახლობელი ინსტანცია დაგვჭირდება და ა. შ. (იხ. გვ. 171). ამგვარად, მითითება გარდამავალ საფეხურებზე არამცთუ წარმოადგენს რაიმე დამატებით გარემოებას იმ ლოგიკურ რეგრესის საწინააღმდეგოთ მიმართულს, რომელსაც იწვევს მოძრაობის განხილვა, როგორც უძრაობის მდებარეობათა ჯამისა, არამედ თითონ მონაწილეობას ღებულობს ამ რეგრესის გამოთქმაში.

თვალსაზრისებს, რომლების მიხედვით მოძრაობა განხილულია, როგორც უძრაობის მდგომარეობათა ჯამი, და ცვლადი განხილულია, როგორც მუდმივ მნიშვნელობათა თავმოყრა, ერთიდაიგივე საფუძველი აქვთ. მათ ნათესაობას აღნიშნავენ ამ თვალსაზრისების მომხრეებიც[2] და ცდილობენ ისინი ერთი მეორის დასახმარებლად გამოიყენონ. ნამდვილად ორივე ეს თვალსაზრისი ემორჩილება ერთ საერთო კრიტიკას, რომელიც გამოავლენს მათ მიუღებლობას.

ჩვენ ზემოთ გამოვედით მარქსის კრიტიკიდან ჯამის თვალსაზრისისა ცვლადი სიდიდის შესახებ და ვეცადეთ სათანადო საკითხები ცვლადის შესახებ დაგვეკავშირებინა საკითხებთან, ერთი მხრით, მოძრაობის და, მეორე მხრით, სიმრავლის შესახებ.

მარქსის კრიტიკას ჯამის თვალსაზრისისა და ცვლადის დიალექტიკური ხასიათის გამოვლენას ძირითადი მნიშვნელობა ჰქონდა მისთვის მათემატიკურ ანალიზის დაფუძნების საკითხების მოგვარებისათვის. ჩვენ აღნიშნული გვქონდა ზემოთ, რომ კოშიმ დაიწყო ახალი ხანა მათემატიკური ანალიზის საფუძვლების კრიტიკული გადაფასების და მისი ლოგიკურად უნაკლო დაფუძნების. ამ მხრივ ძირითადი მნიშვნელობა ჰქონდა მათემატიკურ ანალიზის დაყრდნო-

---

[1] Гегель. Сочинения, т. IX, 1932, стр. 241; В. И. Ленин. Философские тетради, стр. 267.

[2] იხ., მაგ., Russell. Principles of Mathematics, § 332, pp. 350—351.

ზას სიმრავლეთა-თეორიულ ნიადაგზე. მაგრამ ძველი სიძნელეების გადალახვასთან ერთად აღმოჩნდა ახალი სიძნელეები უკვე სიმრავლეთა თეორიის ფარგლებში და აქტუალური მნიშვნელობა მიიღო თითონ სიმრავლეთა თეორიის დაფუძნების საკითხებმა.

მარქსი იცნობდა მათემატიკურ ანალიზის იმ დაფუძნებას, რომელიც იყო კოშის დრომდე. მაგრამ მარქსის მათემატიკურ კონცეპციას დიდი მნიშვნელობა აქვს თანამედროვე მათემატიკური ანალიზის, რომელიც სიმრავლეთა თეორიას ეყრდნობა, საფუძვლების გარკვევისათვისაც. ეს მნიშვნელობა მით უფრო ნათლად დასანახია, რომ უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დაფუძნების სიძნელეები მის განვითარების პირველ ეტაპებზე, რომლებშიაც გარკვეულ სპეციფიურ ფორმაში ერთნაირ გამოხმაურებას ჰპოულობდა მოუგვარებელი მდგომარეობა საზოგადოთ ცვლადის, სიმრავლის, უსასრულობის და სხვ. ცნებების შესახებ, დღეს უფრო ზოგადი და გაშიშვლებული სახით გვხვდება იმავე სიმრავლეთა თეორიაში.

მარქსის კრიტიკას ჯამის თვალსაზრისისა და ცვლადის დიალექტიკურ ხასიათის გამოვლენას, რომელიც მის მიერ, უმთავრესად; უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის საკითხებთან დაკავშირებით იყო წარმოებული, უდიდესი მნიშვნელობა აქვს სიმრავლეთა თეორიის დაფუძნებისათვის და ამ თეორიის სათანადო სიძნელეებისაგან განთავისუფლებისათვის. სწორედ ამიტომ ჩვენ ზემოთ შედარებით დაწვრილებით შევჩერდით იმ დასკვნებზე, რომელნიც სიმრავლის ცნების შესახებ შეიძლება გაკეთებული იყოს ჯამის თვალსაზრისის კრიტიკიდან.

სიმრავლეთა თეორიის ძირითადი სიძნელეები სწორედ იმ თვალსაზრისთანაა დაკავშირებული, რომლის მიხედვით სიმრავლე არის განხილული, როგორც მასში შემავალ ელემენტების გარკვეული დამატებითი შეკრების შედეგი და რომლისთვისაც საგანთა ერთობლივობის გვერდით აღებულია ერთგვარი ჰიპოსტაზირებული სახით წარმოდგენილი მათი სიმრავლე; ამ თვალსაზრისის მიხედვით გამოდის, რომ სიმრავლეს ერთგვარად უსწრებს მისი ელემენტების ერთობლივობა. ამგვარ მიდგომის კრიტიკას ძალიან აადვილებს მარქსის კრიტიკა ჯამის თვალსაზრისისა ცვლადი სიდიდის შესახებ. ერთერთ ჩვენ შემდგომ შრომაში დაწვრილებით გამორკვეული იქნება კავშირი სიმრავლის ცნების ჰიპოსტაზირების და თანამედროვე სიმრავლეთა თეორიის პარადოქსებს შორის და ამ თვალსაზრისის გადალახვის მნიშვნელობა პარადოქსების ამოხსნისათვის.

მარქსის მათემატიკური ხელნაწერების მნიშვნელობა არ შემოიფარგლება მათემატიკური ანალიზით და სიმრავლეთა თეორიით. ისინი გვშველიან შევიმუშაოთ სწორი თვალსაზრისი, საზოგადოთ, მათემატიკის შესახებ მთელ რიგ პრინციპიალურ საკითხების მიმართ. მარქსის მათემატიკურ ხელნაწერებს დაუფასებელი მნიშვნელობა აქვთ მთელი მათემატიკური მეცნიერების და მათემატიკურ კვლევა-ძიების გასწვრივ დიალექტიკურ მატერიალიზმის მსოფლმხედველობის და მეთოდოლოგიის თანმიმდევრულად გატარებისათვის. მარქსის მათემატიკური ხელნაწერები წარმოადგენენ საყურადღებო წყაროს, საზოგადოთ, მარქსისტული ფილოსოფიისათვის და მათ დიდი დახმარების გაწევა შეუძლიათ მარქსისტულ თეორიის მომარჯვებისათვის.

7. მარქსის თვალსაზრისი უსასრულოდ მცირეთა თეორიის დაფუძნების შესახებ

ჩვენ ზემოთ აღნიშნული გვქონდა, რომ მარქსის მიერ ჯამის თვალსაზრისის კრიტიკას და ცვლადი სიდიდის დიალექტიკური ხასიათის გამოვლენას ძირითადი მნიშვნელობა ჰქონდა მისთვის უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დაფუძნების სხვადასხვა თეორიების კრიტიკისათვის და თავის კონცეპციის წამოყენებისათვის. თითონ ჯამის თვალსაზრისის კრიტიკას მარქსი აწარმოებს უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დაფუძნების კონკრეტულ პრობლემატიკასთან დაკავშირებით.

ჯამის თვალსაზრისისათვის, რომელიც, როგორც ზემოთ დავინახეთ, აქტუალურ უსასრულოდ მცირეთა თვალსაზრისთანაა დაკავშირებული, ნაცვლად იმისა, რომ მთლიან სიდიდის სხვადასხვა მნიშვნელობა იყოს აღებული და ამასთან დაკავშირებით ცვლადის ნაზრდები იყოს განხილული, ცვლადის ცვალებამდე წინასწარ აღებულია «ნაზრდი», რომელიც ნამდვილად უკვე ც ვ ლ ა დ ი ს ნაზრდის მდგომარეობაში კი არ იქნება, არამედ თითონ ცვლადის დაქუცმაცების და დაშლის, მისი ცალკეულ ნაწილაკების უბრალო თავმოყრით შეცვლის გამომხატველი იქნება. ასეთ პირობებში ერთგვარად დამახინჯდება თვით ის პროცესი, რომლის საშუალებით უნდათ დაახასიათონ ცვლადის ცვალების ტემპი.

ჯამის თვალსაზრისის მიხედვით წარმოებულის განსაზღვრას — ჩავატაროთ ეს განსაზღვრა მარქსის მიერ გამოყენებულ მაგალითზე

$y=x^3$ [1] — ასეთი ხასიათი ექნება: ცვლადის აღებულ მნიშვნელობას x უმატებთ «ნაზრდს» Δx (ეს ნაზრდი, ნაცვლად იმისა, რომ ცვლადის ძველი და ახალი მნიშვნელობების შედარების საფუძველზე იყოს მიღებული, ადრევე არის დამოუკიდებლად აღებული). y-ის ნაზრდი Δy იქნება: $\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=3x^2\Delta x+3x\Delta x^2$; Δx განიხილავენ, როგორც ელემენტარულ ნაწილაკს, რომლების თავმოყრის შედეგს წარმოადგენს ესათუის სიდიდე. რადგან ის უბრალოდ ნული არ არის, ამიტომ შესაძლებლად მიიჩნევენ მასზე ტოლობის ორივე მხარის გაყოფას: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x$. შემდეგ, რადგან Δx, აღებული როგორც ასეთი, ყოველ სასრულო სიდიდეზე ნაკლებად გვევლინება, ჯამში $3x^2+3x\Delta x$ მეორე წევრს უგულებელვყოფთ და უკუვაგდებთ, ისე რომ აღებული ფუნქციის $y=x^3$ წარმოებულისათვის ვღებულობთ ფუნქციას $3x^2$.

მარქსი მიუთითებს, რომ წარმოებულის მიღების ეს გზა არ იძლევა მას, როგორც გარკვეულ განვითარების შედეგს. წარმოებული $3x^2$ ადრევე მზა სახით გვაქვს $\Delta y=3x^2\Delta x+3x\Delta x$-ში და მთელი შემდგომი პროცესი მდგომარეობს მხოლოდ მის გამონთავისუფლებაში მის გარემოცვისაგან.

მარქსი იძლევა წარმოებულის ისეთ განსაზღვრას, რომელშიაც გათვალისწინებული იქნება ცვალების პროცესის დიალექტიკური მთლიანობა. ვიღებთ დამოუკიდებელ ცვლადის რაიმე განსხვავებულ მნიშვნელობას x_1 x-თან შედარებით, რის შემდეგაც შეგვიძლია ვილაპარაკოთ როგორც დამოუკიდებელ ისე დამოკიდებულ ცვლადების ნაზრდებზე Δx და Δy: $\Delta x=x_1-x$, $\Delta y=x_1^3-x^3=$ $=(x_1-x)(x_1^2+x_1x+x^2)$, აქედან $\frac{\Delta y}{\Delta x}=x_1^2+x_1x+x^2$.

---

[1] საზოგადოდ, უნდა აღინიშნოს, რომ ხშირად მარქსი ზოგად ხასიათის მსჯელობებს კერძო მაგალითებზე აწარმოებს, რაც მათ ზოგადობას ოდნავადაც არ ვნებს, ხოლო ამით გადაცემა უფრო გამომეტყველი ხდება. ნამდვილი ზოგადობა შინაარსის მხრივ არ უნდა იყოს არეული იმ წმინდა გარეგნულ, პედანტურ «ზოგადობასთან» — ყალბი «სერიოზულობის» ერთერთ აქსესუართან, რომელიც საკმაოდ გავრცელებულია, კერძოთ, მათემატიკოსებს შორის და რომელსაც ჰეგელმა მოხდენილად უწოდა ზოგადობის ფორმალიზმი და კეკლუცობა მოჩვენებითი ზოგადობით (**Гегель. Сочинения, т. V, стр. 322**). ბევრმა მათემატიკოსმა შეიძლება ნათლად დაინახოს მარქსის მათემატიკურ ხელნაწერებიდან, რომ მათემატიკური მსჯელობა შესაძლებელია სიცოცხლით სავსე ენით, და იმისათვის, რომ მათემატიკური ჭეშმარიტება გამოთქვა, სრულებით არაა სავალდებულო ცივი და უვნები მეტყველება.

ჩვენ განვიხილავთ ორმაგი უარყოფის პროცესს: x-გან განსხვავებულ მნიშვნელობის x_1 აღებას და შემდეგ ამ განსხვავების მოხსნას, დიალექტიკური გზით კვლავ x-კენ დაბრუნებას. ამასთან დაკავშირებით $x_1^2 + x_1x + x^2$ უკვე მოგვცემს $3x^2$, რომელიც თავიდანვე მზა სახით კი არ გვაქვს, არამედ ვღებულობთ გარკვეულ განვითარების შედეგად. ნაზრდები Δx და Δy კი გვაქვს ტოლობის მარცხენა მხარეზე $\frac{\Delta y}{\Delta x} = x_1^2 + x_1x + x^2$. ჩვენს პროცესთან დაკავშირებით ეს ნაზრდებიც გარკვეულ უარყოფის უარყოფას განიცდიან: ჯერ ვიღებთ ნულისაგან განსხვავებულ სასრულო მნიშვნელობებს, შემდეგ დიალექტიკურად მოვხსნით ამ ცალკეულ სასრულო მნიშვნელობებს. ამის გამოსათქმელად საბოლოოდ ტოლობის მარცხენა მხარეს ასეთ სიმბოლიურ სახით ვწერთ $\frac{dy}{dx}$ და გვექნება: $\frac{dy}{dx} = 3x^2$. მარქსი არჩევს ჩვენი ტოლობის ორ მხარეს: მარცხენას — სიმბოლიურს და მარჯვენას — ალგებრულს.

ამგვარად, მარქსის მიხედვით გვაქვს ორი გზა წარმოებულის განსაზღვრის: ერთი, რომელიც ჯამის თვალსაზრისს ემყარება და რომლისთვისაც წარმოებულის მიღებას მისი გამონთავისუფლების ხასიათი აქვს; მეორე, რომელიც სხვაობის თვალსაზრისს ემყარება და რომლისთვისაც წარმოებულის მიღების პროცესს გარკვეული განვითარების ხასიათი აქვს. მეორე გზა სწორედ ის გზაა, რომელსაც მარქსი იძლევა და უპირისპირებს მანამდე გაბატონებულ ჯამის თვალსაზრისზე დამყარებულ წესს წარმოებულის მიღებისა.

პირველი გზის შესახებ მარქსი აღნიშნავს, რომ იქ «არ ხდება $f'(x)$, ამ შემთხვევაში $3x^2$, არავითარი გ ა ნ ვ ი თ ა რ ე ბ ა (Entwicklung), არამედ მხოლოდ მისი გ ა მ ო ნ თ ა ვ ი ს უ ფ ლ ე ბ ა (Loswicklung) მისი მამრავლისაგან h და მასთან გვერდით დაწყობილ წევრებისაგან» (გვ. 79)[1]. «მთელი შემდგომი განვითარება იმაში მდგომარეობს, რომ სრულებით მზა წარმოებული... გამოვანთავისუფლოთ მისი მამრავლისაგან Δx და მის მეზობელ წევრებისაგან, გამოვიყვანოთ ის მის გარემოცვიდან. ამგვარად ეს არის არა განვითარების მეთოდი, არამედ მხოლოდ გ ა მ ო ნ თ ა ვ ი ს უ ფ ლ ე ბ ი ს მეთოდი» (გვ. 86—87). იმის შემდეგ, რაც წარმოებული უკვე თავიდანვე მზა სახით მოწოდებულია ბინომის შესა-

[1] თვით სიტყვა Loswicklung შედგენილია კ. მარქსის მიერ სიტყვასთან Entwicklung დაპირისპირების გზით.

ხებ ფორმულით და მოინახება როგორც გაშლილი წკრივის მეორე წევრი, მთელი შემდგომი დიფერენციალური პროცესი ფუფუნებას წარმოადგენს (გვ. 81). ჯამის თვალსაზრისის შემთხვევაში დამოუკიდებელ x ცვლადის ნაზრდი «ერთის მხრით განუსაზღვრელია, მაგრამ, მეორეს მხრით, იგი უკვე იმდენად განსაზღვრულია, რომ x-ის განუსაზღვრელი ზრდა წარმოდგება უკვე როგორც საკუთრივი სიდიდე, რომლითაც x გაიზარდა და ამიტომ, როგორც ასეთი, x-ის გვერდით დგას» (გვ. 19).

პირიქით, წარმოებულის მეორე გზით გამოყვანის შემთხვევაში «გაზრდილი x_1 შედის ალგებრულ ფუნქციაში სრულებით ისეთსავე სახით, რომლითაც მასში თავში შედიოდა x: x^3 ხდება x_1^3. წარმოებული $f'(x)$ შეიძლება მიღებული იყოს მხოლოდ ბოლოს, დიფერენცირების ორი ოპერაციის მიმდევრობით შესრულების შედეგად, ყოველ რომელთაგანს სრულებით თავისებური ხასიათი აქვს» (გვ. 19)[1]. «ძირითადი განსხვავება, — სწერს ერთერთ წერილში ენგელსი მარქსს[2],—შენი და ძველი მეთოდს შორის იმასში მდგომარეობს, რომ შენ საშუალებას აძლევ x გადაიქცეს x_1-ად, მაშასადამე, მართლაც შეიცვალოს, იმ დროს, როცა სხვები გამოდიან $x+h$-დან, რაც ყოველთვის წარმოადგენს მხოლოდ ორ სიდიდის ჯამს, მაგრამ არა ერთ სიდიდის ცვალებას. ამიტომ შენი x მაშინაც კი, თუ ის x_1-ზე გადის და შემდეგ გადაიქცევა პირვანდელ x-ად, მაინც რაღაც სხვას წარმოადგენს, ვიდრე თავში; იმ დროს, როცა x-თვის h-ის მიმატებით და შემდეგ ხელახლად მისი გამოკლებით x-ს ყოველთვის ტოვებენ მუდმივად».

მარქსს უნდა, რომ წარმოებულის მიღება, თუნდაც, მაგალითად, x^3 ფუნქციისათვის, დაკავშირებული იყოს არა ბინომის ფორმულის უბრალოდ გამოყენებასთან, არამედ დიფერენცირების ოპერაციასთან, რომელიც განსხვავების დადგენაში და მოხსნაში მდგომარეობს. ეს დიფერენცირების ოპერაცია გამოხმაურებას ჰპოულობს დიფერენციალურ

---

[1] იმ მნიშვნელობის შესახებ, რომელიც შეიძლება ჰქონდეს ზემოთ მითითებულ წამოწევას მარქსის მიერ განვითარების თვალსაზრისისა, გამონთავისუფლების თვალსაზრისთან დაპირისპირებით, ლოგიკური დასკვნის პრობლემის გადაწყვეტისათვის იხ. ჩემი შრომა: К проблеме аксиоматизации логики, 1947.

[2] К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. XXIV, 1931, стр. 590.

ნაწილაკებისადმი მიმართვაში, რომელნიც ტოლობის მარცხენა მხარეზე გვაქვს (განსხვავების შესახებ, რომელსაც მარქსი ატარებს დიფერენციალურ ნაწილაკებს და დიფერენციალებს შორის, იხ. ქვემოდ). დიფერენციალურ ნაწილაკთა შეფარდება « $\frac{dy}{dx}$ არის არა მარტო სიმბოლო $\frac{0}{0}$-თვის, არამედ იმავე დროს პ რ ო ც ე ს ი ს სიმბოლო, რის გამოც პირველადი განტოლების გარკვეულ მოცემულ პირობებში გაჩნდა $\frac{0}{0}$; და ის გამოთქვამს იმას, რისი გამოთქმა არ შეუძლია $\frac{0}{0}$ — სახელდობრ, რომ Δy-ის ნულად გადაქცევა ჩნდება y ფუნქციის x დამოუკიდებელ ცვლადისადმი თვისობრივი დამოკიდებულებისაგან, და რომ ამიტომ გარდაქმნა Δy-ის dy-ად არის შედეგი Δx-ის გარდაქმნისა dx-ად. მაშასადამე, უარყოფაში შენარჩუნებულია უარყოფილი თ ვ ი ს ო ბ რ ი ვ ი დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ე ბ ა. პირიქით, $\frac{0}{0}$-ში არ ჩანს რა ქ რ ე ბ ა, გამოთქმულია მხოლოდ რ ა ო დ ე ნ ო ბ ი თ ი მხარე — სახელდობრ, რომ გაქრა მრიცხველი და აგრეთვე მნიშვნელი და ამით ქრება თვით შეფარდებაც». (გვ. 16).

არსებობს ერთგვარი გარეგნული მსგავსება წარმოებულის განსაზღვრის მარქსის მიერ მოწოდებული გზის და ლანდენის მიერ დამუშავებულ მეთოდს შორის. ლანდენიც მიმართავს თავში არა ნაზრდებს, არამედ ღებულობს ცვლადის განსხვავებულ მნიშვნელობებს და მერე მათ გატოლებას ახდენს, მაგრამ იმ დროს, როცა ლანდენის მეთოდი ამ ალგებრული მხარით ამოიწურება, მარქსთან ალგებრული მხარე განუყრელად დაკავშირებულია დიფერენციალურთან.

ინტერესს იწვევს ის გარემოება, რომ, მიუხედავად იმისა, რომ მარქსის ყურადღების ცენტრშია ცვლადი სიდიდე და მისი დიალექტიკური ხასიათი, მარქსი უარყოფითად არის განწყობილი ზღვართა თეორიის მიმართ. ამ გარემოების ასახსნელად უნდა გავითვალისწინოთ ზღვართა თეორიის იმდროინდელი მდგომარეობა (იხ. გვ. 98 — 103, 142 — 143, 175), როცა ზღვართა თეორია ნამდვილ რიცხვთა არითმეტიკულ თეორიაზე არ იყო დაყრდნობილი. ზღვარი განხილული იყო, როგორც უსასრულობაში გადაკარგული, რომელსაც ცვლადი შეიძლება მხოლოდ ბევრად თუ ნაკლებად «მიუახლოვდეს», და არა

როგორც ლოგიკურად დასრულებულად დახასიათებული თვით ცვლადის საშუალებით.

მარქსმა ღრმად შეაფასა ლოგიკურად არადამაკმაყოფილებელი ხასიათი იმდროინდელ ზღვართა თეორიის, როდესაც ზღვრის ცნებისადმი მიმართვაში დაინახა მხოლოდ მიახლოვებითი მდგომარეობით დაკმაყოფილება და სრული ლოგიკური სიზუსტის უგულებელყოფა. «ზოგ თანამედროვესთან ზღვარი დამალულია კიდევ იმაში, რომ დიფერენციალური ნაწილაკები და დიფერენციალური კოეფიციენტები გამოთქვამენ მხოლოდ მიახლოვებით მნიშვნელობებს» (გვ. 47). ასეთ შეფასებას სავსებით ამართლებს ის შემდგომი საფუძვლიანი გარდაქმნა, რომელიც ზღვართა თეორიამ განიცადა და რომელიც საჭირო იყო ამ თეორიის მკაცრი ლოგიკური დაფუძნებისათვის. ძველი ზღვართა თეორია არამცთუ აბათილებდა იმ ხერხების არასიზუსტეს, რომელნიც უსასრულოდ მცირე სიდიდეების სათანადო სიტუაციაში უკუგდებასთან იყო დაკავშირებული, არამედ თითონაც გარკვეულის მხრივ მონათესავე ხასიათი ჰქონდა.

არითმეტიკული სიმცირე ამათუიმ სიდიდის არ ნიშნავს მის ლოგიკურ უმნიშვნელობას, მისი უკუგდების შესაძლებლობას. აღებულ სიდიდის სიმცირე მისი სათანადო ხასიათის გამომხატველია და არა დამატებითი საბუთია ამ ობიექტის ლოგიკურად მცირე მნიშვნელობის სასარგებლოდ. სიდიდის სიმცირე არ შეიძლება იყოს ლოგიკური საბუთი მისი უკუგდების სასარგებლოდ. არ შეიძლება ის, რაც სათანადო წევრების გაჩენას იწვევს, თითონვე შეიცავდეს საბუთს მათი უკუგდებისათვის განწირულობისა, სათანადო სიდიდე არ შეიძლება შემოტანილი იყოს მისი უგულებელყოფისათვის. გამოვა, რომ ამგვარი სიდიდეების პრეტენზიები — იყვნენ გარკვეული სიდიდეები — ისეთი იქნება, რომელიც, ჰეგელის სიტყვებით რომ ვთქვათ, გვაიძულებს შემდეგ ვიმუშაოთ იმაზე, რომ ამის მიუხედავად მათგან განვთავისუფლდეთ, ისინი უკუვაგდოთ [1].

წარმოებულის მიღების დროს გზაზე მდგომ სათანადო წევრების ნაძალადევ მოსპობის შესახებ მარქსი შენიშნავს, რომ ეს უკვე წინასწარ გულისხმობს, რომ იციან, რომ ისინი დგანან გზაზე და ნამდვილად არ ეკუთვნიან წარმოებულს (გვ. 75).

«...როგორ იყო იქ, პირველ (ისტორიულ) მეთოდში, მიღებული გამოსავალი პუნქტი დიფერენციალურ სიმბოლოებისათვის, როგორც

[1] Гегель. Сочинения, т. V, стр. 325.

ოპერატიულ ფორმულებისათვის? ცხად ან ფარულ მეტაფიზიკურ წინამძღვრების საშუალებით, რომლებსაც თავის მხრივ მივყავართ მეტაფიზიკურ, არამათემატიკურ დასკვნებისაკენ: ჩნდება ნაძალადევი ამოშლა ზოგიერთ გამოყვანის გზაზე მდგომ და ამავე დროს თვით მისგანვე გაჩენილ სიდიდეების» (გვ. 43). გვიანაა გამოყვანის პროცესში არარსებულად მივიჩნიოთ თვით ამ გამოყვანის პროცესშივე წარმომდგარი სიდიდეები. როცა მათი უგულებელყოფა გვინდა და ვარწმუნებთ ჩვენ თავს, რომ მათ არსებობას, ასე ვთქვათ, ვერ ვამჩნევთ, ამ არსებობამ უკვე მოასწრო თავის თავის საკმაოდ გამომჟღავნება.

მარქსი გადაჭრით ილაშქრებს იმის წინააღმდეგ, რომ წარმოებულის განსაზღვრა გაგებული იყოს, როგორც მდგომარეობის მხოლოდ მიახლოვებითად დამახასიათებელი. «წუგეში, რომელსაც მაგრად ეჭიდებიან მარაციონიზებელი (rationalisierende) მათემატიკოსები, სახელდობრ, რომ, ვითომც, რაოდენობრივად $\frac{dy}{dx}$ არის ნამდვილად მხოლოდ უსასრულოდ მცირეთა შეფარდება, მხოლოდ მიახლოვებით არის $\frac{0}{0}$, წარმოადგენს ქიმერას...» (გვ. 7).

მარქსის მოსაზრებანი არამცთუ ლაპარაკობენ თანამედროვე ზღვართა თეორიის წინააღმდეგ, არამედ მათემატიკურ ანალიზის ძირითად ცნებების განსაზღვრის შესახებ მარქსის მიერ დასახულ ამოცანის საუკეთესო რეალიზაციას იძლევა მათი განსაზღვრები თანამედროვე მკაცრ ზღვართა თეორიის საფუძველზე. ამის ჩვენებისათვის უნდა პირველ რიგში ყურადღება მიექცეს იმას, რომ სათანადო ცნებების განსაზღვრის დროს მარქსი ძირითად მნიშვნელობას ანიჭებს ცვლადების ნამდვილი ცვალების უზრუნველყოფას.

დიფერენციალურ ოპერაციას მარქსისათვის არა აქვს ხასიათი განსხვავების დადგენის და შემდეგ მისი უბრალო გაუქმების, რაც, როგორც ის ამბობს, მიგვიყვანს პირდაპირ არაფრისაკენ. «მთელი სიძნელე დიფერენციალურ ოპერაციის გაგებაში (როგორც ყოველივე უარყოფის უარყოფისა საზოგადოდ) სწორედ იმაში მდგომარეობს, რომ გავიგოთ რითი განსხვავდება ის ასეთი უბრალო პროცედურიდან და როგორ მივყევართ ამიტომ ნამდვილ შედეგებამდე» (გვ. 5—6). «რადგან გამოსახულებაში $\frac{0}{0}$ გაქრა ყოველივე კვალი

მისი წარმოშობის და მნიშვნელობის, ჩვენ ვცვლით მას $\frac{dy}{dx}$-ით, სადაც სასრული სხვაობები $x_1 - x$ ანუ Δx და $y_1 - y$ ანუ Δy წარმოგვიდგებიან სიმბოლიზირებულები, როგორც მოხსნილი ანუ გამქრალი სხვაობები» (გვ. 7). ეს სწორედ იმას ნიშნავს, რომ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-თვის განვიხილავთ გარკვეულ ცვალების პროცესს Δx-ის ნულთან მისწრაფებასთან დაკავშირებით. /

მარქსი მკაფიოდ და ხაზგასმით ლაპარაკობს სათანადო ცვალების პროცესებზე. «x_1 კლებულობს და უახლოვდება x-ს» (გვ. 7). «...x_1-ის ქმნადობა x-ის ტოლად...» (გვ. 71). «როგორც კი საქმე გვაქვს ცვლადებთან, შემაგრება $\frac{0}{0}$-ის წარმოშობისა სიმბოლოების $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ საშუალებით არა მარტო გამართლებულია, არამედ პირდაპირ აუცილებელია» (გვ. 55). «...ეს შედეგი $\frac{0}{0}$ განტოლების მარცხენა მხარეზე იყო მიღებული მოძრაობების გამო, რომელნიც მომდინარეობდნენ მარჯვენა მხარეზე მოთავსებულ x ცვლადიდან» (გვ. 14).

«...ეს ფორმა ($= y_1 - y$ თუ $y = f(x)$) არის ფუნქციათა სხვაობის ფორმა, რომელიც ფუნქციის ნაზრდის დამოუკიდებელ ცვლადის ნაზრდთან შეფარდებად გარდასაქმნელად მოითხოვს განვითარებას, რომელიც მაშასადამე თამაშობს რეალურ როლს და არა წმინდა ნომინალურს, როგორც მისტიკოსებთან» (გვ. 77—78).

[«$\frac{dy}{dx}$ არის არა მარტო სიმბოლო $\frac{0}{0}$-თვის, არამედ ამავე დროს პროცესის სიმბოლო...» (გვ. 16). «... $\frac{dy}{dx}$ სინამდვილეში აღნიშნავს არა ექსტრავაგანტურ $\frac{0}{0}$-ს, არამედ, პირიქით, არის სადღესასწაულო მოკაზმულობა (Sonntagsuniform) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-თვის, რამდენადაც ეს უკანასკნელი წარმოგვიდგება, როგორც უსასრულოდ მცირე სხვაობების შეფარდება ე. ი. სხვანაირად, ვიდრე ჩვეულებრივ სხვაობათა აღრიცხვაში (Differenzenrechnung)» (გვ. 33). «უსასრულოდ მცირე სიდიდენი არიან ისევე სიდიდენი, როგორც უსასრულოდ დიდები

(სიტყვა «უსასრულოდ» ნიშნავს ნამდვილად მხოლოდ განუზღვრელად მცირეს)». (გვ. 68). («...Δx და Δy რჩებიან ყოველთვის სასრულო სხვაობებად ანუ ნაზრდებად, მაგრამ სასრულო სხვაობებად ან ნაზრდებად შემცირების განუზღვრელი უნარით» (გვ. 46).

შეგვიძლია გავიხსენოთ აგრეთვე ენგელსის სიტყვები იმის შესახებ, რომ, როცა მარქსის მეთოდში ვიღებთ აღებულ x-გან განსხვავებულ მნიშვნელობებს და შემდეგ იმავე x-ს უბრუნდებით, ეს არ არის უბრალოდ აღებულ x-ის განმეორება.

«შემოტრიალების პუნქტი მათემატიკაში, — ამბობს ენგელსი, — იყო დეკარტისეული ც ვ ლ ა დ ი ს ი დ ი დ ე. ამის გამო მათემატიკაში შევიდა მ ო ძ რ ა ო ბ ა და დ ი ა ლ ე ქ ტ ი კ ა და ამისავე გამო მაშინვე ა უ ც ი ლ ე ბ ე ლ ი შ ე ი ქ მ ნ ა დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი და ი ნ ტ ე გ რ ა ლ უ რ ი ა ღ რ ი ც ხ ვ ა...» «მხოლოდ დიფერენციალური აღრიცხვა აძლევს ბუნებისმეტყველებას საშუალებას გამოსახოს მათემატიკურად პ რ ო ც ე ს ე ბ ი, და არა მარტო მ დ გ ო მ ა რ ე ო ბ ა ნ ი, მოძრაობა»[1].

უსასრულოდ მცირესადმი მიმართვა ისე არ უნდა გავიგოთ, რომ თავში, სანამ სათანადო ოპერაციების წარმოება გვიხდება, განვიხილავთ ნულისაგან განსხვავებულ მნიშვნელობას და ბოლოს მოულოდნელად გამოვაცხადებთ მას, როგორც ნულს. გვიან იქნება მისი ნულად გამოცხადება იმის შემდეგ, რაც ვისარგებლეთ იმით, რომ ის ნულისაგან განსხვავდება. თუ მსჯელობის გარკვეულ საფეხურზე მ ა ს ნულად აცხადებენ, ეს მას, როგორც ასეთს, უნდა შეეხოს და არა მას ამავე საფეხურის ჩარჩოებში (ამ საფეხურზე ხომ სწორედ იმაზეა ლაპარაკი, რომ ის ნულია).

ორი მოთხოვნილების შეერთება — ნულისაგან განსხვავებული და ამავე დროს ყოველ სასრულო სიდიდეზე ნაკლები მნიშვნელობები გვქონდეს — მათი მექანიკური გაერთიანებით კი არ იქნება მიღებული — ისეთი ფიქსირებული სიდიდის აღებით — აქტუალური უსასრულოდ მცირის სახით, რომელიც ნულისაგან განსხვავებულიცაა და ყოველ სასრულო სიდიდეზე ნაკლებია, არამედ უმაღლეს საფეხურზე ასვლით, გარკვეულ განვითარების პროცესისადმი მიმართვით. ის, რაც ცალკეულად აღებულ სიდიდისათვის უთავსადია, დიალექტიკურად ერთიანდება ცვლადი სიდიდის საშუალებით.

ნულისაგან განსხვავებულ მნიშვნელობის აღება და შემდეგ მისი

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. XIV, стр. 426—427, 509.

დიალექტიკური მიხსნა იმით კი არ იქნება განხორციელებული, რომ ისეთ ფიქსირებულ სიდიდეზე ვილაპარაკოთ, რომელიც ნულისაგან განსხვავებულია და ყოველ სასრულო სიდიდეზე ნაკლებია, არამედ განხორციელდება ისეთი ცვლადი სიდიდის განხილვით, რომელიც ნულისაკენ მიისწრაფის. საკითხი წყდება არა ისეთ სიდიდისადმი მიმართვით, რომელსაც ჯერ სთვლიან ნულისაგან განსხვავებულად და ბოლოს კი იღებენ ნულის ტოლად, არამედ, ნულისაკენ მიმსწრაფ ცვლადი სიდიდის განხილვით, რომლის მნიშვნელობანი ნულისაგან განსხვავდებიან (შეად. შენიშვნა გვ. 151). უბრალოდ იმის თქმა, რომ ისეთ სიდიდეს განვიხილავთ, რომელიც ნულიცაა და ნულისაგან განსხვავებულიც, სრულებით არ წარმოადგენს საკითხის გადაწყვეტას; კონკრეტულად უნდა იყოს მითითებული გარკვეულ განვითარებაზე, რომელიც სათანადო სინთეზს უზრუნველყოფს. აქ შეიძლება ენგელსის შემდეგი სიტყვები გავიხსენოთ: «ჰეგელმა ძალიან იოლად გაართვა თავი ამ გაყოფადობის საკითხს, იმისი თქმით, რომ მატერია ისიც არის და ესეც, გაყოფადიც და განუწყვეტელიც და იმავე დროს არც ერთია და არც მეორე, რაც სრულებით არაა პასუხი..., მაგრამ რაც ახლა თითქმის დამტკიცებულია»[1]. შეიძლება აღინიშნოს, რომ ჰეგელი არ იყო ზოგჯერ თავისუფალი ასეთი დეკლარატიული ხასიათის დიალექტიკიდან სათანადო მათემატიკურ საკითხებზე მსჯელობის დროსაც. საილუსტრაციოდ შეიძლება ასეთი ადგილი მოვიყვანოთ: «თუმცა მრავალგვერდა წრე ან სწორხაზოვანი წრის რკალი ეწინააღმდეგებიან ამ კანონს (წინააღმდეგობის), გეომეტრები უყოყმანოთ განიხილავენ წრეს, როგორც მრავალგვერდედს, რომლის გვერდები არიან სწორი ხაზები»[2]. საჭიროა, იმავე ჰეგელის ერთერთი გამოთქმა რომ ვიხმაროთ, წინააღმდეგობათა გადაწყვეტა, და არა მათი მხოლოდ შენდობა[3].

უსასრულოდ მცირის შესახებ პირვანდელი წარმოდგენების კრიტიკა მარქსის მიერ, ჯამის თვალსაზრისის კრიტიკასთან დაკავშირებით, სწორედ იმგვარ მიდგომას შეეხება, რომლის მიხედვით უსასრულოდ მცირე წარმოადგენს მექანიკურ შეერთებას ერთ სიდიდეში ორ მოთხოვნილების: ნულისაგან განსხვავებულობის და იმის, რომ ყოველ სასრულო სიდიდეზე ნაკლები იყოს. ამის შესახებ უფრო დაწვრილებით გვექნება საუბარი, როცა გადავალთ მარქსის შეხედულებების განხილვაზე მათემატიკურ ანალიზის დაფუძნების ისტორიის შესახებ.

[1] Ibid., 408—409.
[2] Гегель. Сочинения, т. I, 1930, стр. 204.
[3] Гегель. Сочинения, т. V, 1937, стр. 318.

წარმოებულის განსაზღვრისას აღებულია ფუნქციისა და არგუმენტის ნაზრდების შეფარდება $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ არგუმენტის ნაზრდის ნულისაკენ მისწრაფების პირობებში. თუ ავიღებთ Δx-ის რაიმე ცალკეულ მნიშვნელობას, მივიღებთ Δx-ის ფუნქციის $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ერთერთ მნიშვნელობას, ხოლო ჩვენ თითონ ეს ფუნქცია გვაინტერესებს Δx-ის ნულთან მისწრაფებასთან დაკავშირებით; Δx-ის რაიმე მნიშვნელობაზე შეჩერება მხოლოდ «მიახლოვებით» სურათს მოგვცემდა, რადგან შესაძლებელი იქნებოდა მდგომარეობის შემდგომი გაუმჯობესება; ახლა, თუ Δx პირდაპირ ნულს გაუტოლებთ, მოიხსნება თითონ საკითხის დაყენება, რომელიც დაკავშირებული იყო ნაზრდის აღებასთან x-ის განსხვავებულ მნიშვნელობათა შედარებით. თუ Δx ნულის ტოლია, Δy-იც ნულის ტოლი იქნება, და მივიღებთ განუსაზღვრელობას $\frac{0}{0}$, რაც ყველა შესაძლებელ რიცხვთა სიმრავლეს წარმოადგენს და არ ახდენს რაიმე რიცხვის ფიქსაციას სხვებისაგან განსხვავებით.

საკითხის ნამდვილი გადაწყვეტა იმაში მდგომარეობს, რომ განვიხილოთ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ც ვ ლ ა დ ი ს ზღვარი, როცა Δx ნულისაკენ მიისწრაფის. ზღვართა მკაცრ თეორიას, საზოგადოთ, უსწრებს ნამდვილ რიცხვთა არითმეტიკული თეორია. ასეთ პირობებში მყარდება მჭიდრო კავშირი ცვლადის აგებულებასა და ზღვრის არსებობას შორის (იხ. გვ. 106—110). ზღვარი, როგორც გარკვეული რიცხვი, პირველად კი არ იქმნება არითმეტიკულად იმით, რომ ის განხილულია, როგორც სათანადო ცვლადის ზღვარი, არამედ ნამდვილ რიცხვთა ზოგად ცნების ფონზე აღებულ ცვლადის საშუალებით ხდება გარკვეული რიცხვის ფიქსაცია, რომლის შესახებ შემდეგ მტკიცდება, რომ ის ჩვენი ცვლადის ზღვარია. ზღვარი, ამგვარად, ლოგიკურად მოცემულია ცვლადთან დაკავშირებით და არა ცვლადის მნიშვნელობების ლოგიკურად შემდგომია და უსასრულობაში გადაკარგული.

საქმე ისე კი არ უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ თითონ ცვლადი უნდა გახდეს ზღვარი, რომლის მიღწევას ის იმავე დროს ვერ ახერხებს, არამედ ისე, რომ გვაქვს, ერთის მხრით, ცვლადი და, მეორეს მხრით, მის საშუალებით ფიქსირებული გარკვეული რიცხვი, რომლის შესახებ ირკვევა, რომ ის ჩვენ ცვლადთან ზღვრის დამოკიდე-

ბულებაშია. ასეთ პირობებში ზღვრისადმი მიმართვა სრულებით არ მოასწავებს მიახლოვების თვალსაზრისზე დგომას.

ჩვენ ვხედავთ, რომ თანამედროვე ზღვართა თეორია საშუალებას იძლევა მოვახდინოთ, კერძოთ, წარმოებულის ცნების იმ სახით რეალიზაცია, რიგორც ეს მარქსის თვალსაზრისიდან გამომდინარეობს. მარქსმა კარგად დაინახა ძველი ზღვართა თეორიის ლოგიკურად არადამაკმაყოფილებელი მდგომარეობა და ამით ადრევე იგრძნო იმ საფუძვლიანი ლოგიკური გარდაქმნის საჭიროება, რომელიც შემდეგ ზღვართა თეორიამ განიცადა.

ის ღრმა აზრი, რომელსაც მარქსი სდებს განვითარების მეთოდის ცნებაში და მის დაპირისპირებაში გამონთავისუფლების მეთოდთან, საუკეთესოდ რეალიზებული იქნება თანამედროვე ზღვართა თეორიის მიერ. მართლაც, როცა მარქსი ლაპარაკობს ისეთ მეთოდზე წარმოებულის მიღებისა, რომლის საშუალებით წარმოებული გამოყვანილი იქნება განვითარების და არა გამონთავისუფლების გზით, ეს მითითება განვითარებაზე არ უნდა გაგებული იყოს გარეგნულად, როგორც მხოლოდ იმაზე ზრუნვა, რომ სათანადო ფორმულაში ადრევე არ სჩანდეს იმ ფუნქციის გამოსახულება, რომელიც წარმოებული უნდა იყოს. ასეთი ზრუნვა, პირიქით, იმის მომასწავებელი იქნებოდა, რომ ჩვენ ადრევე უწევთ ანგარიშს იმას, თუ რომელ ფუნქციას მივიღებთ წარმოებულის სახით და ვცდილობთ ჩანაწერი ისეთნაირად გავაკეთოთ, რომ ეს გარეგნულად არ სჩანდეს.

როცა ამათუიმ ფუნქციის წარმოებულს ვიღებთ, ეს არ ნიშნავს, რომ ფუნქცია, რომელიც აღებული ფუნქციის წარმოებულია, პირველად შემოდის ყოველთვის თითონ ამ წარმოებულის საშუალებით და მანამდე ცნობილი არ არის. მაგალითად x^3 ფუნქციის წარმოებული $3x^2$ პირველად მაშინ კი არ იწყებს არსებობას, როცა ჩვენი ფუნქციის წარმოებულს მივიღებთ. მართალია, სწორედ იმ ფუნქციაზე არის ლაპარაკი, რომელიც აღებულ ფუნქციის წარმოებულს წარმოადგენს და გვიანაა ამის შემდეგ ვთქვათ, რომ წარმოებული აქ არაფერ შუაშია, მაგრამ სწორედ ეს ფუნქცია არ არის პირველად შემოყვანილი წარმოებულის საშუალებით.

რაიმე ფუნქცია შეიძლება იყოს წარმოებული მეორე ფუნქციის მიმართ; თავისთავად ის გარკვეული ფუნქციაა და არა ჰიპოსტაზირებული სახით არსებული «წარმოებული». ამიტომ არაფერი გასაოცარი არ იქნება იმასში, რომ მის შესახებაც დაისვას საკითხი წარმოებულზე. აქ თითონ წარმოებულის ცნების წარმოებულს კი არ ავიღებთ, არამედ იმ

ფუნქციის წარმოებულს, რომელიც აღებული ფუნქციის წარმოებულია, მაგრამ თავისთავად კვლავ გარკვეულ ფუნქციას წარმოადგენს. მიღებული ფუნქცია იქნება არა თავისთავად წარმოებულის წარმოებული, არამედ გამოსავალ ფუნქციის მიმართ. ამიტომ, თუ თითონ წარმოებულის ცნებას ნათლად წარმოიდგენენ, არ შეიძლება რაიმე დამატებითი გართულება გამოიწვიოს წარმოებულის წარმოებულის ცნებამ და ა. შ. «სიმბოლოები $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. აჩვენებენ მხოლოდ «წარმოებულის» საგვარეულო ნუსხას (Stammregister) x-ის მოცემულ პირველად ფუნქციის მიმართ. ისინი ხდებიან საიდუმლო მხოლოდ იმდენად, რამდენადაც მათ განიხილავენ როგორც მოძრაობის გამოსავალ პუნქტს, და არა როგორც უბრალო გამოხატულებას x-ის მიმდევრობით წარმოებულ ფუნქციებისას. მართლაც, მაშინ ეჩვენებათ საკვირველად, რომ გამქრალების შეფარდებამ კვლავ უნდა გაიაროს გაქრობის უფრო მაღალი ხარისხები, იმ დროს, როცა არაფერი საკვირველი არ არის იმაში, რომ, მაგალითად, $3x^2$-ს ისევე კარგად შეუძლია გაირბინოს დიფერენციალური პროცესი, როგორც, მაგალითად მის წინაპარს x^3-ს. ჩვენ ხომ შეგვიძლია გამოვიდეთ $3x^2$-დანაც, როგორც პირველად ფუნქციიდან» (გვ. 10).

რადგან არ არის სავალდებულო, რომ ის ფუნქცია, რომელიც აღებულ ფუნქციის წარმოებულს წარმოადგენს, პირველად გაჩნდეს თითონ წარმოებულის საშუალებით, ამიტომ ის განვითარება, რომელიც, საზოგადოთ, წარმოებულის მიღების პროცესშია, არ შეიძლება დაკავშირებული იყოს სათანადო ფუნქციის პირველად გაჩენასთან, და ამ განვითარებისათვის არ შეიძლება დამაბრკოლებელი იყოს ის, რომ ფორმულებში, რომლების საშუალებით წარმოებულს ვიღებთ, ეს ფუნქცია ადრევე მონაწილეობდეს. წარმოებულის მიღების პროცესით გამოხატული განვითარება იმასთან უნდა იყოს დაკავშირებული, რომ გვაქვს გარკვეული უსასრულო პროცესი ცვალებისა, და არა უბრალოდ ჩამოცილება და უკუგდება ხელისშემშლელად მიჩნეულ წევრებისა. მაშინ საძიებელი ფუნქცია, როგორც სწორედ წარმოებული, მიღებული იქნება განვითარების, და არა გამონთავისუფლების გზით.

ჩვენ ამგვარად ვხედავთ, რომ მარქსმა გენიალურად განსჭვრიტა უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დაფუძნების შემდგომი განვითა-

რება, და ნამდვილ რიცხვთა არითმეტიკულ თეორიაზე დამყარებული თანამედროვე ზღვართა თეორია საშუალებას იძლევა მარქსის დაფუძნების თეორიაში დასახულ გეგმების სრულ რეალიზაციისა.

8. მარქსის თვალსაზრისი მათემატიკურ ანალიზის სააღრიცხვო აპარატის შესახებ

იმისათვის, რომ დიფერენციალურ აღრიცხვას ჰქონდეს ნამდვილი მეცნიერული თეორიის ხასიათი, ისეთ მდგომარეობას უნდა გავსცილდეთ, როცა ყოველი ფუნქციის წარმოებულის მისაღებად დაგვჭირდება საქმის დაწყება თავიდან და ყველა იმ საფეხურების გავლა, რომელნიც თითონ წარმოებულის ცნებაშია მოცემული. საჭიროა გვქონდეს ისეთი წესები, რომელნიც საშუალებას მოგვცემენ, იმის შემდეგ, რაც ვიცით გარკვეულ ფუნქციების წარმოებულები, მათი საშუალებით შევადგინოთ გარკვეული ახალი ფუნქციის წარმოებულები ერთნაირი ფორმალური გზით, გარეშე იმისა, რომ ხელახლა გავირბინოთ მთელი პროცესი წარმოებულის მიღებისა.

დიფერენციალური აღრიცხვა იძლევა მთელ რიგ ასეთ წესებს, მაგალითად, თუ ცნობილია ფუნქციათა ჯამში შემავალ თითოეულ ფუნქციის წარმოებული, ჯამის წარმოებულის მისაღებად საკმარისია ეს წარმოებულები გამოვიყენოთ, შევადგინოთ მათი ჯამი და არ დაგვჭირდება ხელახლა ცალკე გავატაროთ წარმოებულის მოძებნის პროცედურა. ამგვარ წესებს აქვთ ერთნაირად ფორმალური ხასიათი იმ მხრივ, რომ მათი გამოყენების დროს წარმოებულის ცნების შინაარსი შეიძლება არც იქცევდეს ყურადღებას და შედეგი მიღებული იყოს გარკვეული გარეგნული მოქმედების საშუალებით.

დებულებას: ჯამის წარმოებული ტოლია შემადგენელ ფუნქციათა წარმოებულების ჯამისა — ერთგვარად პირობითი ხასიათი აქვს. ის გვეუბნება, რომ, თუ ცნობილია ცალკე შესაკრებ ფუნქციების წარმოებულები, მათი საშუალებით შეგვიძლია შევადგინოთ ჯამის წარმოებული. ასეთი დებულების გამოყენება მოხდება იმის შემდეგ, რაც აღებულ კერძო შემთხვევაში უკვე გვაქვს შესაკრებ ფუნქციათა წარმოებულები.

ზემოთდასახელებული ტიპის დებულებების შესახებ არ უნდა ვიფიქროთ, რომ აქ წარმოებულის ცნების შინაარსობრივი მხარე თავიდანვე უგულებელყოფილია. ის, რომ წარმოებული არის ფუნქციის ნაზრდის და არგუმენტის ნაზრდის შეფარდების ზღვარი, გათვალის-

წინებულია თითონ იმ ზოგადი მსჯელობის დროს, რომლის საშუალებით მიღებულია ის საერთო დებულება, რომ ჯამის წარმოებული შესაკრებ ფუნქციათა წარმოებულების ჯამის ტოლია. მაგრამ იმის შემდეგ, რაც საერთო წესი მიღებულია, უკვე ზედმეტია ყოველ კერძო შემთხვევაში იგივე მსჯელობა გავიმეოროთ, წარმოებულის ცნების შინაარსი კვლავ აღვადგინოთ და საქმე თავიდანვე დავიწყოთ — შეგვიძლია შედეგი მივიღოთ სათანადო ფორმალური გზით, მზა წესების გამოყენებით, რომელიც გვეტყვის თუ აღებულ შემთხვევაში როგორ უნდა მოვიქცეთ, გარკვეული გარეგნული მოქმედების საშუალებით. დიფერენციალურ აღრიცხვას აქვს თავისი მთლიანი და მძლავრად და ფართოდ მომქმედი სისტემა ფორმალურ წესების, თავის ალგორითმი, თავის საალრიცხვო აპარატი.

რასაკვირველია, თითონ ხასიათი მათემატიკის და მათემატიკური ობიექტების ხელს უწყობს იმას, რომ შესაძლებელი იყოს სათანადო ფორმალური სისტემების და საალრიცხვო აპარატების აგება. მათემატიკური ცნებანი, თავისივე ხასიათის მიხედვით, ემსახურებიან გარეგნული გარკვეულობის გამოთქმას და თითონ შესაფერისი საგნები თავის თვისობრივი გარკვეულობით განსაზღვრულ ფარგლებში განურჩეველ მდგომარეობაში არიან მათ იმ მხარის მიმართ, რომელიც მათემატიკურ ცნებებით გამოისახება. ეს არ ნიშნავს, რომ მათემატიკას საქმე არა აქვს ცნებებთან, რომ ის არ ასახავს ს ი ნ ა მ დ ვ ი ლ ი ს გარკვეულ მხარეს, რომ ზოგადი ფილოსოფიური ცნებები მათემატიკის მიმართ თავის მნიშვნელობას კარგავენ, რომ ზოგადი აზრი ზოგადის და ცალკეულის დამოკიდებულებისა მათემატიკის შემთხვევაში დაცული არაა და სხ.. ზოგადი, მათემატიკური ცნებების მიმართაც, განუყრელია თ ა ვ ი ს ცალკეულებთან; მათემატიკურ ცნებებს თავისი საკუთარი შინაარსი აქვთ, და საქმე ამ მ ა თ შინაარსის გაუქმებას კი არ შეეხება, არამედ იმას, რომ ამ მათივე შინაარსის მიხედვით ეს ცნებები გამოხატავენ საგნების ერთნაირად გარეგნულ მხარეს. ამიტომ თითონ მასალა მათემატიკისა ყველაზე ხელსაყრელ პირობებს ქმნის ფართო მასშტაბის ფორმალურ ხასიათის თეორიების აგებისათვის, რომლებშიაც გვაქვს საკმაოდ ძლიერი სახით მოცემული შედარებითი დამოუკიდებლობა სათანადო საგნების კონკრეტულ ბუნების მიმართ. უკანასკნელი გარემოება სრულებით არ ლაპარაკობს მათემატიკური თეორიების საგნობრივი და შინაარსობრივი დაფუძნების წინააღმდეგ. მათემატიკა თითონ სინამდვილის ცნებას კი არ ცვლის თავისებურად, არამედ არსებული სინამდვილის გარკვეულ მხარეს შეისწავლის.

ფორმალურ აპარატის ღირსების ერთერთ მაჩვენებელს წარმოადგენს ის, თუ რამდენად ფართოდ ეს აპარატი საშუალებას იძლევა საერთო სქემას დაუმორჩილოთ შინაარსობრივად განსხვავებული მდგომარეობანი, რამდენად შორს ფორმალური კვლევა-ძიება შეგვიძლია ვაწარმოოთ არსებულ მდგომარეობის შესახებ მინიმალური მონაცემების ფარგლებში, ამ მდგომარეობის ყოველმხრივ კონკრეტულ დახასიათების გარეშე. უნდა ითქვას, რომ ამ მხრივ ძალიან დიდი მნიშვნელობა აქვს, კერძოთ, დიფერენციალის ცნებას.

ჩვენ ზემოთ უკვე აღნიშნული გვქონდა ფართო მაშტაბით მოცემული ინვარიანტობა, რომელიც დიფერენციალის ცნებას ახასიათებს (იხ. გვ. 121—123), დიფერენციალებში გაკეთებულ ჩანაწერის სიმტკიცე შინაარსობრივად ერთი მდგომარეობიდან მეორე მდგომარეობაში გადასვლისას, ის მნიშვნელოვანი უპირატესობა, რომელიც ამ მხრივ დიფერენციალს აქვს, შედარებით წარმოებულთან. ამიტომ ის სპეციფიური ალგორითმი, რომელსაც უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვაში ვიყენებთ, მჭიდროთ არის დაკავშირებული დიფერენციალთან და მის თვისებებთან. ეს ალგორითმი, რასაკვირველია, თითონ მიღებულია სათანადო ცნებების საფუძველზე და არა უკანა რიცხვით თვით მათი შემომყვანია ფორმალურ დამოკიდებულებაში მონაწილე ცალიერ ტერმინების სახით. ალგორითმული აპარატის გამოყენება საშუალებას იძლევა გამოვარკვიოთ, თუ რა შეიძლება მიღებული იყოს მხოლოდ სათანადო ფორმალურ დამოკიდებულებათა საშუალებით, წარმოებულის და სხ. ცნებების შინაარსის ხ ე ლ მ ე ო რ ე დ გაუთვალისწინებლად. ეს, რასაკვირველია, მარტო გარეგნულ «ეკონომიის» მოსაზრებით კი არ არის ნაკარნახევი, არამედ იმით, რომ გარკვეული იყოს თეორიის აგებულება, ის, თუ რა შედეგი რისგან არის დამოკიდებული და სხ.

მარქსი დიდ ყურადღებას აქცევს პრობლემებს, რომელნიც უსასრულოდ მცირეთა თეორიის სააღრიცხვო აპარატთან არიან დაკავშირებული.

მარქსი, როგორც ზემოდაც აღნიშნულია, წარმოებულის განსაზღვრასთან დაკავშირებით, ერთი მეორისაგან არჩევს ტოლობის $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ მარჯვენა და მარცხენა მხარეს, იმ მხრივ, რომ მარჯვენა მხარე წარმოადგენს დიფერენცირების რეალურ პროცესს, ხოლო მარცხენა მხარე მის ერთგვარ სიმბოლიურ ასახვას. მარჯვენა ალგებრული მხარე აქ თავისუფალია დიფერენციალური აღრიცხვისათვის

სპეციალურ ნიშნებისაგან, რომელნიც მოთავსებული არიან მარცხენა — სიმბოლიურ მხარეზე. «განტოლებებში ერთი, x-დან დამოკიდებული, ცვლადით საბოლოო შედეგი იყო ყოველთვის $\frac{dy}{dx}=f'(x)$, სადაც $f'(x)$ $f(x)$-ის პირველი წარმოებული — იყო თავისუფალი ყოველგვარ სიმბოლიურ გამოსახულებიდან... სწორედ დიფერენცირების პროცესების გამო, რომელიც უნდა გაერბინა $f(x)$ ფუნქციას, რომ $f'(x)$-ად გადაქცეულიყო, — უკანასკნელის ე. ი. რეალურ დიფერენციალურ კოეფიციენტის შესახვედრად გაჩნდა მარცხენა მხარეზე მისი სიმბოლიური ექვივალენტის სახით მისი ორეული $\frac{0}{0}$ ანუ $\frac{dy}{dx}$. მეორე მხრით, $\frac{0}{0}$ ანუ $\frac{dy}{dx}$-მა მონახა $f'(x)$-ში თავის რეალური ექვივალენტი» (გვ. 21—22). ამ შემთხვევაში ინიციატივა ეკუთვნის მარჯვენა ალგებრულ მხარეს.

მაგრამ მდგომარეობა არსებითად იცვლება, როცა გვაქვს რაიმე ფორმულა, რომელიც მოცემულ ფუნქციების წარმოებულების საშუალებით გამოთქვამს ამ ფუნქციებისაგან შედგენილ სათანადო ფუნქციის წარმოებულს. მარქსი ამგვარ შემთხვევებთან დაკავშირებულ მსჯელობას აწარმოებს ფუნქციათა ნამრავლის uz წარმოებულის ფორმულის მაგალითზე: $\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}$.

აქ «პირველი წარმოებული uz-დან თითონ შეიცავს სიმბოლიურ დიფერენციალურ კოეფიციენტებს, რომელნიც ამიტომ დგანან განტოლების ორივე მხარეზე, იმ დროს როცა რეალური მნიშვნელობა არც ერთზე არ არის» (გვ. 22).

მარქსი ადარებს ფორმულებს $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ და $\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}$ და აღნიშნავს, რომ ორივე შემთხვევაში $\frac{dy}{dx}$ თამაშობს ერთნაირ როლს. «სხვაგვარად არის საქმე $\frac{du}{dx}$ და $\frac{dz}{dx}$-თვის. სხვა ელემენტებთან ერთად $f'(x)$ წარმოებულისა, რომელშიაც ისინი ჩართული არიან, ისინი ჰპოულობენ $\frac{dy}{dx}$-ში თავის სიმბოლიურ გამოსახულებას, თავის სიმბოლიურ ექვივალენტს, მაგრამ თვით ისინი არ უპირისპირდებიან არავითარ $f'(x)$, $\varphi'(x)$, რომელთათვისაც ისინი იქნებოდ-

ნენ სიმბოლიური ორეულები. ერთმხრივად გაჩნდნენ ისინი ქვეყანაზე. ჩრდილები უსხეულოდ, რომელიც მათ უკუაგდებს; სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტები გარეშე რეალურ დიფერენციალურ კოეფიციენტების ე. ი. გარეშე შესაბამის ექვივალენტურ «წარმოებულების». სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტი ხდება ამგვარად დამოუკიდებელი გამოსავალი პუნქტი. მისი რეალური ექვივალენტი აწი უნდა იყოს ნახული. ამგვარად ინიციატივა გადაინაცვლა მარჯვენა ალგებრულ პოლუსიდან მარცხენა სიმბოლიურზე. მაგრამ სწორედ ამით დიფერენციალური აღრიცხვა გამოდის როგორც გარკვეული სპეციფიური აღრიცხვა, უკვე დამოუკიდებლად მომქმედი თავის საკუთარ ნიადაგზე, რადგან მისი გამოსავალი პუნქტები არიან მხოლოდ მისადმი კუთვნილი და მისი მახასიათებელი მათემატიკური სიდიდეები» (გვ. 24). «რადგან ეს გადატრიალება მეთოდში გაჩნდა uz ფუნქციის ალგებრულ მოძრაობიდან, თითონ ის უნდა იყოს ალგებრულად დასაბუთებული» (გვ. 25). «...თითონ სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტები გახდნენ უკვე საგანი ანუ შინაარსი დიფერენციალური ოპერაციის, იმის ნაცვლად, რომ, როგორც წინად, ფიგურირებდნენ როგორც მხოლოდ მისი სიმბოლიური შედეგი» (გვ. 36).

მარქსის მოყვანილ სიტყვებში საუცხოვოთ დახასიათებულია დიფერენციალურ აღრიცხვისათვის სპეციფიური სააღრიცხვო აპარატი, მისი საკუთარი ალგორითმი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს სათანადო შემთხვევებში შედეგი მივიღოთ ერთგვარი გარეგნული მოქმედების გზით, გარეშე იმისა, რომ თავიდანვე აღვადგინოთ მთელი პროცედურა წარმოებულის განსაზღვრისა. მაგრამ დიფერენციალური აღრიცხვის ფორმალური აპარატი საქმის დასაწყისში კი არ გვაქვს, არამედ თითონ მას ესაჭიროება შინაარსობრივი დასაბუთება.

იმ ფორმულებში, რომელნიც დიფერენციალური აღრიცხვის ალგორითმს შეადგენენ, მაგალითად $\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}$-ში, აღებულ კონკრეტულ ფუნქციებზე სათანადო დიფერენციალური ოპერაცია კი არ არის უკვე შესრულებული, არამედ აქ გარკვეული პირობითი მდგომარეობაა გამოსახული: თუ გამოვითვლით რაიმე u და z ფუნქციების წარმოებულს, მაშინ მათი საშუალებით შევადგენთ uz ფუნქციის წარმოებულსაც და უკანასკნელს სპეციალური გამოთვლა არ ესაჭიროება, საქმის თავიდან დაწყებით. ამიტომ, თუ საკითხი დგას

ამათუიმ შემთხვევაში ფორმულის $\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}$ გამოყენებაზე, საჭიროა წინასწარ მოვძებნოთ აღებულ u და z ფუნქციების წარმოებულები, რის შემდეგ შევადგენთ uz ფუნქციის წარმოებულსაც. ასეთ შემთხვევაში «სიმბოლიური დიფერენციალური გამოსახულებანი ჩნდებიან არა როგორც სიმბოლიური შედეგი x-ის ნამდვილ ფუნქციებზე წარმოებულ დიფერენციალურ ოპერაციებისა, არამედ, პირიქით, თამაშობენ ახლა სიმბოლოების როლს, რომელნიც მიუთითებენ დიფერენციალურ ოპერაციებზე, რომელნიც ჯერ კიდევ უნდა შესრულებული იყვნენ x-ის რეალურ ფუნქციებზე ე. ი. ...ეს გამოსახულებანი ხდებიან ამგვარად ო პ ე რ ა ტ ი უ ლ ს ი მ ბ ო ლ ო ე ბ ა დ» (გვ. 36—37). «ამასთან ერთად განტოლება $\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}$, თავიდანვე წმინდა სიმბოლიური... გარდაიქცევა ზოგად სიმბოლიურ ოპერატიულ განტოლებად» (გვ. 26).

მარქსი, ამგვარად, სათანადო ფორმალურ აპარატს ერთგვარ ნორმატიულ მნიშვნელობასაც ანიჭებს, მასში ხედავს მითითებას გარკვეულ მოქმედებაზე; ეს აპარატი ერთნაირ აქტიურ მდგომარეობას გულისხმობს, მოითხოვს მის ცალკეულ შემთხვევებში გამოყენებას. აქაც მჟღავნდება ზოგადის და ცალკეულის განუყრელობა და მათემატიკურ აპარატის კავშირი პრაქტიკასთან. ამასთანავე მარქსის ზემოთმოყვანილი თვალსაზრისი ადასტურებს იმას, რომ პირობითი ხასიათის მსჯელობა—თუნდაც ის, რომელიც აკავშირებს ნამრავლის წარმოებულს მამრავლების წარმოებულებთან, უნდა იყოს შეფასებული არა როგორც მხოლოდ ფორმალისტური მნიშვნელობით გაგებულ «სისწორის» გამომხატველი, არამედ როგორც პრაქტიკასთან დაკავშირებული ცოცხალი ჭეშმარიტების გამოთქმის გარკვეული საშუალება.

ჩვენ ეხლა გვინდა მივაქციოთ ყურადღება შემდეგ გარემოებას: დიფერენციალურ აღრიცხვის საალრიცხვო აპარატს მარქსი მჭიდროთ უკავშირებს დიფერენციალების გამოყენებას. შეიძლება დაისვას საკითხი: რატომ თუგინდ ნამრავლის წარმოებულის შესახებ იმავე დებულების გამოთქმა წარმოებულების ჩვეულებრივი სიმბოლიკის საშუალებით: $(uz)'=u'z+uz'$ არ არის საკმარისი იმისათვის, რომ ის მიკუთვნილი იყოს დიფერენციალურ აღრიცხვისათვის დამახასიათებელ საგამოთვლო აპარატისადმი? სწორედ აქ თავს იჩენს დიფერენციალის სათანადო ფორმალური უპირატესობა წარმოებუ-

ლის წინაშე—მის სათანადო ინვარიანტობასთან დაკავშირებით, რაზედაც ზემოთ იყო საუბარი.

მარქსი ტერმინს; დიფერენციალი ორგვარი მნიშვნელობით ხმარობს და ამ მნიშვნელობებს მკაფიოდ არჩევს ერთი მეორესაგან, და საჭირო შემთხვევაში, არევ-დარევის აცილების მიზნით, მიმართავს განსხვავებულ ტერმინებსაც: die Differentielle და das Differential (მათ სათარგმნელად ქართულად ვხმარობთ ტერმინებს: დიფერენციალური ნაწილაკები და დიფერენციალი): პირველი ნიშნავს არგუმენტის და ფუნქციის მოხსნილ სასრულო ნაზრდებს, ხოლო მეორე—დიფერენციალს ამ სიტყვის დღევანდელ მნიშვნელობითაც — წარმოებულის ნამრავლს არგუმენტის ნებსით ნაზრდზე. რაც შეეხება პირველ ცნებას, მის მიმართ თანამედროვე მათემატიკაში ტერმინს დიფერენციალს არ ხმარობენ და მის რეალიზაციისათვის იყენებენ სათანადო გადასვლას ზღვარზე. დიფერენციალური ნაწილაკები გვჭირდება თითონ წარმოებულის მისაღებად, დიფერენციალს კი, პირიქით, წარმოებულის დახმარებით შევადგენთ. «...დიფერენციალური კოეფიციენტი $\frac{dy}{dx}=2x$ უნდა იყოს წინასწარ გამოყვანილი, სანამ ჩვენ შევძლებთ დიფერენციალის $dy=2xdx$ მიღებას» (გვ. 68). «...იმისათვის, რომ y-ის ამ დიფერენციალს ჰქონდეს რაიმე აზრი, დიფერენციალური ნაწილაკები dy, dx ადრევე უნდა იყოს ნ ა გ უ ლ ი ს ხ მ ე ვ ი, როგორც გარკვეულ აზრის მქონე სიმბოლოები» (გვ. 46). შეიძლება აღინიშნოს, რომ ეს მკაფიო გარჩევა მარქსის მიერ დიფერენციალის და დიფერენციალურ ნაწილაკების ხელახალი მაჩვენებელია იმისა, თუ რამდენად მარქსს ნათელი თვალსაზრისი შემუშავებული ჰქონდა უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის საფუძვლებზე.

მარქსი გარკვევით აღნიშნავს დიფერენციალის ცნების უპირატესობას სააღრიცხვო აპარატის ოპერატიულობის თვალსაზრისით. ის ლაპარაკობს დიფერენციალის საყოველთაო (allgemeingültige) ფორმის შესახებ (გვ. 27), იმ უდიდეს უპირატესობაზე, რომელიც ანსხვავებს დიფერენციალურ აღრიცხვას და იმასში მდგომარეობს, რომ ცვლადის ყველა ფუნქციები თავიდანვე წარმოიდგინებიან დიფერენციალური ფორმით (გვ. 66). მარქსი ითვალისწინებს იმ გარემოებას, რომ, იმის შემდეგ, რაც დიფერენციალური ნაწილაკების საშუალებით წარმოებული განსაზღვრულია: $\frac{dy}{dx}=f'(x)$, იმავე ჩანაწერში

$\frac{dy}{dx}$ შეიძლება წაკითხული იყოს, როგორც უკვე დიფერენციალების შეფარდება; ამიტომ, როცა ის იმ ფორმულების ოპერატიულობაზე ლაპარაკობს, რომელნიც დიფერენციალურ ნიშნაკების საშუალებით არიან გამოთქმული, აქ საქმე ეხება არა უბრალოდ დიფერენციალური ნაწილაკების მონაწილეობას, არამედ სწორედ იმ ფორმალურ უპირატესობებს, რომელიც დიფერენციალს აქვს. ეს უპირატესობანი საშუალებას გვაძლევენ ავხსნათ ის, თუ რატომ მარქსისათვის დიფერენციალური აღრიცხვის სპეციფიური ალგორითმი განუყრელად დაკავშირებულია დიფერენციალის ცნების გამოყენებასთან.

9. მარქსის მიმოხილვა უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დაფუძნების ისტორიისა

მარქსიზმისათვის კვლევა-ძიება ამათუიმ მეცნიერულ დისციპლინაში მჭიდროდ დაკავშირებულია ამ დისციპლინის ისტორიის განილვასთან. მათემატიკურ ანალიზის და მის დაფუძნების საკითხების გამოკვლევის დროს მარქსი დიდ ყურადღებას აქცევს ისტორიულ მხარეს. ის იძლევა მთლიან მიმოხილვას უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის საფუძვლების ისტორიისა, რომელშიაც გარკვეულ კონცეპციას ანვითარებს მათემატიკურ ანალიზის დაფუძნების განვითარების შესახებ. ამ განვითარებაში ის რამოდენიმე ეტაპს არჩევს.

პირველ ეტაპს, რომელიც უსასრულოდ-მცირეთა აღრიცხვის აღმომჩენელების: ლეიბნიცის და ნიუტონის პერიოდთან დაკავშირებულია, მარქსი ახასიათებს, როგორც მისტიკურ დიფერენციალურ აღრიცხვას. აქ უსასრულოდ მცირის ცნებას ერთგვარად მეტაფიზიკური და მისტიკური ხასიათიც აქვთ. უსასრულოდ მცირე აქტუალური უსასრულოდ მცირის სახით წარმოუდგენიათ — ისეთი ფიქსირებული სიდიდის სახით, რომელიც საჭიროების მიხედვით ხან ნულია და ხან ნულისაგან განსხვავებული. ამასთან დაკავშირებით სათანადო სიტუაციაში ხდება უსასრულოდ მცირეების უგულებელყოფა და უკუგდება. ლაპარაკობენ სიდიდეებზე გაქრობის და ჩასახვის მომენტში, ქრებადად-მცირე სიდიდეებზე და სხ.. უსასრულოდ მცირის ცნების მისტიკური ხასიათი პირველ პერიოდში გამოხატულებას ჰპოულობს ბერკლის უკვე ჩვენს მიერ ციტირებულ ფიგურალურ გამოთქმაში «განსვენებულ სიდიდეების აჩრდილები».

ლოგიკურად გაუმართლებელი ხერხებით მიღებული შედეგების

სისწორე, რასაც თითონ პრაქტიკა ადასტურებდა, და ამ შედეგების უფართოესი გამოყენების შესაძლებლობა ხელს უწყობდნენ იმას, რომ გამტკიცებულიყო შეხედულება უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის მისტიკურ ხასიათზე. «თითონ სჯეროდათ მისტიკური ხასიათი ახლად აღმოჩენილ აღრიცხვის, რომელიც იძლეოდა სწორ (და გეომეტრიულ გამოყენებებში პირდაპირ განსაცვიფრებელ) შედეგებს მათემატიკურად გარკვეულად არასწორი გზით» (გვ. 77).

ჩვენ ზემოთ უკვე აღნიშნული გვქონდა, რომ უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის შემქმნელები, განსაკუთრებით ლეიბნიცი, არ უცდიდნენ იმას, რომ სათანადო ცნებები შინაარსობრივად ბოლომდე დადგენილი ყოფილიყო და უკვე თავიდანვე მათ, ჯერ კიდევ ლოგიკურად გაუფორმებელი სახით, ჩააბამდნენ სააღრიცხვო პროცედურაში, და თითონ იმ ალგორითმს, რომელშიაც ისინი მონაწილეობდნენ გარკვეულ ტერმინების სახით, უკანა რიცხვით ევალებოდა მათი ერთგვარი დახასიათება. ლეიბნიცისათვის ასეთი ალგორითმული მიდგომა პრინციპიალურ ხასიათსაც ღებულობს. «...დიფერენციალები.... იყვნენ თავიდანვე შემოყვანილი განმარტების მიხედვით როგორც თავისთავადი, იმ ცვლადი სიდიდეებისაგან განცალკევებული არსებობანი, რომლებისაგან ისინი გაჩნდნენ, და არა გამოყვანილი რაიმე მათემატიკური გზით» (გვ. 64).

«ნიუტონი და ლეიბნიცი, როგორც მათი მიმდევრების უმრავლესობაც, მოქმედებდნენ თავიდანვე დიფერენციალურ აღრიცხვის ნიადაგზე. ამიტომ დიფერენციალური გამოსახულებანი თავიდანვე გამოყენებული იყო როგორც ოპერატიული ფორმულები იმისათვის, რომ მოძებნილი ყოფილიყო შემდეგ რეალური ექვივალენტები» (გვ. 63).

«თუ ჩვენ თავიდანვე დაუშვებთ, რომ x გაზრდისას გადაიქცევა $x+\dot{x}$ ... ან, ლეიბნიცთან ერთად, $x+dx$-ად, დიფერენციალური გამოსახულებანი ერთბაშად ხდებიან ოპერატიულ სიმბოლოებად, უიმისოდ, რომ იყოს გამოვლინებული მათი ალგებრული წარმოშობა» (გვ. 64). მოვიყვანთ კიდევ მარქსის შემდეგ დახასიათებას დიფერენციალური აღრიცხვის მისტიური საფეხურის: «$x_1=x+\Delta x$ თავიდანვე გადაიქცევა $x_1=x+dx$ ანუ $x+\dot{x}$, სადაც dx წამძღვარებულია მეტაფიზიკურ გ ა რ კ ვ ე ვ ი ს საშუალებით. ჯერ არსებობს და მერე ირკვევა. მაგრამ მაშინ აგრეთვე $y_1=y+dy$ ანუ $y_1=y+\dot{y}$. ამ ნებსით დაშვებიდან გამომდინარეობს როგორც დასკვნა, რომ სწორი შედეგის მისაღებად საჭიროა ბინომის $x+\Delta x$ დაშლაში უ კ უ ვ ა გ დ ო თ x და Δx-ის

შემცველი წევრები, მიღებული პირველი წარმოებულის გვერდით და ა. შ... რადგან დიფერენციალურ აღრიცხვის ფაქტიურ აგებისას გამოდიან ამ უკანასკნელ შედეგიდან, სახელდობრ *დიფერენციალურ ნაწილაკებიდან*, რომელნიც წასწრებულად არის აღებული, არ გამოიყვანება, არამედ წაემძღვარება ახსნა-გარკვევის საშუალებით, ამიტომ ამავე გარკვევის საშუალებით *წასწრებულადვე არის აღებული* $\frac{dy}{dx}$ ანუ $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ — სიმბოლიური დიფერენციალური კოეფიციენტი» (გვ. 74). «...*დიფერენციალი*, დიფერენციალური ნაწილაკების წასწრებულად აღებისას, აგრეთვე თავიდანვე მოცემულია» (გვ. 74). აქ საუცხოვოდ დახასიათებულია ის მიდგომა, რომელსაც ადგილი ჰქონდა დიფერენციალურ აღრიცხვის განვითარების პირველ ეტაპზე. ნაცვლად იმისა, რომ სათანადო ცნებები თავის მათემატიკურ შინაარსის მიხედვით ყოფილიყვნენ დახასიათებული და მერე ჩაბმული სააღრიცხვო პროცედურაში, თავიდანვე მათ, ჯერ ცნების სახით ბოლომდე გაუფორმებელს, განიხილავდნენ, როგორც ოპერატიულ სიმბოლოებს: ადრევე გულისხმობდენ მათ როგორც არსებულს, თუმცა არ იყო დახასიათებული ის, რის არსებობაზეც უკვე ლაპარაკობდნენ, და შემდეგ ცდილობდნენ მათ მეტაფიზიკურ გარკვევას. დაგვიანებული გამოდის თავის მათემატიკურ შინაარსის დახასიათება მათ იმ ალგორითმიდან მიიღონ, რომელიც თითონ უნდა იყოს დამყარებული მათი შინაარსის გათვალისწინებაზე.

მიუხედავად დიფერენციალების ლოგიკურად ნაჩქარევი შემოყვანისა, თვით მათდამი მიმართვას ისტორიულად ის დადებითი მნიშვნელობა ჰქონდა, რომ შესაძლებელი გახდა სათანადო ალგორითმის ამოძრავება. «...a priori ნაგულისხმევ dx, dy, etc. ანუ $\dot{x}$, $\dot{y}$, etc. როგორც x და y-ის თავისთავად იზოლირებულ ნაზრდების პირობებში მე ვღებულობ უდიდეს უპირატესობას, რომელიც ანსხვავებს დიფერენციალურ აღრიცხვას და იმასში მდგომარეობს, რომ ცვლადების ყველა ფუნქციები თავიდანვე წარმოიდგინებიან დიფერენციალურ ფორმაში» (გვ. 66).

მართალია, ნიუტონი ცდილობს ერთგვარ შინაარსობრივ დაფუძნების მონახვას, მაგრამ თავის თეორიის ობიექტურ ხასიათის მიხედვით ის მთლიანად თავსდგება მისტიკურ დიფერენციალურ აღრიცხვის ჩარჩოებში, და მარქსი სავსებით მართებულად მიუთითებს იმ ზოგად ნიშნებზე, რომელიც საზოგადოთ ეპოქისათვის დამახასიათებელია და ერთნაირად შეეხება მის სხვადასხვა წარმომადგენლებს.

მაგრამ ამასთანავე მარქსს მხედველობიდან არ რჩება ის თავისებურებანიც, რომელნიც ანსხვავებს ერთიმეორისაგან ნიუტონის და ლეიბნიცის თეორიებს. მარქსი მიუთითებს ნიუტონის ცდაზე ზღვრის ცნებისადმი მიმართვისა. «...ზ ღ ვ რ ი ს ა ნ ზ ღ ვ ა რ ი თ ი მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ი ს [კათეგორიები], რომელნიც გვხვდება უკვე ზოგჯერ დიფერენციალურ კოეფიციენტის ნაცვლად ნიუტონთან და გამოყვანილია მის მიერ კიდევ წმინდა გეომეტრიულ წარმოდგენებიდან, აქამდესაც მუდმივად თამაშობენ გამოჩენილ როლს...» (გვ. 47). ამავე დროს მარქსი აღნიშნავს ლეიბნიცის გარკვეულ უპირატესობას ნიუტონის წინაშე იმ მხრივ, რომ «...მახვილი სხვაობაზე ნაზრდის ნაცვლად (ფლუქსიების ნიუტონთან) ყოველ შემთხვევაში წინათგრძნობილია ლეიბნიციანურ აღნიშვნაში: dy წინააღმდეგ ნიუტონიანურისა $\dot{y}$» (გვ. 78). ამასთან დაკავშირებით შეიძლება გავიხსენოთ თითონ ლეიბნიცის სიტყვები იმის შესახებ, რომ ის დიფერენციალურ აღრიცხვამდე მივიდა «არა ხაზების ნაზრდების საშუალებით (როგორც ნიუტონი), არამედ რიცხვებს შორის სხვაობების საშუალებით» [1].

უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დაფუძნების შემდგომ საფეხურს, შედარებით მისტიურ დიფერენციალურ აღრიცხვასთან, მარქსი უკავშირებს დალამბერის დაფუძნების თეორიას. მარქსი ამ შემთხვევაში ლაპარაკობს რაციონალურ დიფერენციალურ აღრიცხვაზე, იმასთან დაკავშირებით, რომ დალამბერი გასცილდა მისტიურ თვალსაზრისს უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის საფუძვლების შესახებ და შეეცადა მოეხდინა აღრიცხვის რაციონალიზაცია. დალამბერი აძლევს დამოუკიდებელ ცვლადს არა აქტუალურ უსასრულოდ მცირე, არამედ სასრულო ნაზრდს Δx, შეადგენს შეფარდებას $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ და შემდეგ Δx ნულისაკენ მიმსწრაფად განიხილავს. «დალამბერი იწყებს უშუალოდ ნ ი უ ტ ო ნ ი ს და ლ ე ი ბ ნ ი ც ი ს გ ა მ ო ს ა ვ ა ლ პ უ ნ ქ ტ ი დ ა ნ: $x_1=x+dx$. მაგრამ მას შეაქვს ერთბაშად ფუნდამენტალური შესწორება: $x_1=x+\Delta x$ ე. ი. $x+$ გ ა ნ უ ზ ღ ვ რ ე ლ ი მაგრამ prima faciae ს ა ს რ უ ლ ო ნ ა ზ რ დ ი, რომელსაც ის აღნიშნავს h-ით. გადაქცევა ამ h ანუ Δx-ის dx-ად... ხდება როგორც მხოლოდ განვითარების საბოლოო შედეგი ან ყოველ შემთხვევაში უშუალოდ ბოლოს წინ, იმ დროს, როცა მისტიკოსებთან და აღრიცხვის ინიციატორებთან ის არის გამოსავალი პუნქტი...» (გვ. 77).

---

[1] იხ. К. Фишер. Лейбниц, 1905, стр. 111.

მარქსს მიაჩნია, რომ დალამბერის მეთოდშიც წარმოებულის მიღებას ტოლობის მარჯვენა მხარეზე აქვს არა განვითარების, არამედ გამონთავისუფლების ხასიათი. «...მიღება $(x+h)^3$-ის x^3-ის ნაცვლად გვაძლევს: x^3+3x^2h+etc., სადაც $3x^2$ უკვე ჩნდება წკრივის მეორე წევრში, როგორც h-ის პირველი ხარისხის კოეფიციენტი. ამიტომ დასკვნა არის არსებითად იგივე, რაც ლეიბნიცთან და ნიუტონთან, მაგრამ მზა წარმოებული $3x^2$ გამონთავისუფლდება მისი გარემოცვისაგან მკაცრი ალგებრული გზით. აქ არ ხდება არავითარი განვითარება $f'(x)$, აღებულ შემთხვევაში $3x^2$-ის, არამედ მისი მხოლოდ გამონთავისუფლება მისი მამრავლისაგან h და მასთან გვერდით დაწყობილ წევრებისაგან. მაგრამ რაც ნამდვილად ვითარდება, ეს მარცხენა სიმბოლიური მხარე...» (გვ. 79).

დალამბერი წარმოებულს ზღვარზე გადასვლის ოპერაციის საშუალებით განსაზღვრავს. მაგრამ თვით ზღვართა თეორია იმ დროს არ იყო მკაცრ ლოგიკურ საფუძველზე დადგენილი. ზღვარი წარმოდგენილი ჰქონდათ, როგორც ერთგვარად უსასრულობაში გადაკარგული, და ზღვარზე გადასვლას უფრო ლოგიკური ნახტომის, ვიდრე ბუნებრივი განვითარების ხასიათი ჰქონდა (იხ. გვ. 143). ამიტომ წარმოებულის მიღება ტოლობის მარჯვენა მხარეზე დალამბერის მეთოდის მიხედვით მართლაც ხდება უფრო ერთგვარი ჩამოჭრის და ჩამოკვეთის და არა განვითარების სახით.

მათემატიკურ ანალიზის დაფუძნების განვითარების პროცესში მნიშვნელოვან როლს მარქსი ანიჭებს ლაგრანჟის თეორიას. ლაგრანჟი შეეცადა წარმოებული შემოეყვანა და მისი თეორია გაეშალა წმინდა ალგებრული გზით (იხ. გვ. 143—144). ამან ხელი შეუწყო იმ ალგებრულ პროცესების გამოვლინებას, რომელნიც წარმოებულის ცნებასთან დაკავშირებულია და პირველ რიგში ტეილორის ფორმულის მნიშვნელობის წამოწევას. «დიფერენციალურ აღრიცხვის ალგებრაიზაციისათვის ლაგრანჟი თავის უშუალო გამოსავალ პუნქტად ღებულობს ტეილორის ფორმულას, რომელიც ნამდვილად წარმოადგენს ყველაზე ზოგადს, საყოველთაო თეორემას და ერთდროულად ოპერატიულ ფორმულას დიფერენციალური აღრიცხვის» (გვ. 82). მაგრამ თვითონ ალგებრული მიდგომა ლაგრანჟისა ფორმალისტური ხასიათის იყო და ამ მიდგომის საშუალებით ის ცდილობდა იმ დიფერენცირების პროცესის უკუღებელყოფას, რომელიც განუყრელად დაკავშირებულია წარმოებულის ცნების შინაარსთან. «ლაგრანჟი... გამოსავალ პუნქტად იღებს დამოუკიდებელ ცვლადების ნამდვილ

ფუნქციების ალგებრულ წარმოებას, ხოლო დიფერენციალურ სიმბოლოებს ხდის უბრალო სიმბოლიურ გამოსახულებად უკვე წარმოებულ ფუნქციებისა» (გვ. 58). «ჩვენ მაშასადამე შეგვიძლია სიმეტრიის გულისათვის შედეგები მიღებული წმინდა ალგებრული გზით წარმოვადგინოთ იმავე დროს მათ სიმბოლიურ დიფერენციალურ ექვივალენტებშიც—ნომენკლატურის საქმე, რომელიც მხოლოდ ერთი რჩება საკუთრივ დიფერენციალურ აღრიცხვიდან» (გვ. 81).

მარქსმა ღრმად გამოიკვლია მათემატიკურ ანალიზის დაფუძნების განვითარების გზა, ამ განვითარების კანონზომიერებანი და სხვადასხვა არსებული თეორიის ყოველმხრივი შეფასება მოგვცა. მათემატიკური ანალიზის ლოგიკური საფუძვლების შესწავლა მან მჭიდროდ დაუკავშირა საკითხის ისტორიას. მარქსმა არა მარტო გამოავლინა ნათლად ცვლადი სიდიდის დიალექტიკური ხასიათი, არამედ მოახერხა ამასთან დაკავშირებით გაეშალა მთელი თეორია მათემატიკური ანალიზის დაფუძნებისა, რომელიც ბრწყინვალედ გაამართლა მათემატიკის შემდგომ განვითარებამ.

10. მათემატიკის დაფუძნების პრობლემა

უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვამ ლოგიკურად ზუსტი ხასიათი მხოლოდ მეცხრამეტე საუკუნეში მიიღო. მანამდე კი, განსაკუთრებით პირველ ხანებში, მის მიერ გამოყენებული მეთოდები თავის ლოგიკურ დამაჯერებლობის მხრივ მეტად საეჭვოდ გამოიყურებოდნენ. იმის ასახსნელად, თუ როგორ მოხერხდა სწორი შედეგების მიღება ლოგიკურად არასრულფასიანი მეთოდების გამოყენებით, მარქსი მიუთითებს ექსპერიმენტალურ გზაზე, რომელმაც სათანადოთ მიმართა ამ მეთოდების გამოყენება (გვ. 75 — 76).

პრაქტიკის პრიმატის ცნობის გარეშე სრულებით აუხსნელი დარჩება მათემატიკის, ისევე როგორც ყოველგვარი სხვა მეცნიერების, განვითარება, მისი შედეგების ჭეშმარიტება და გამოყენების შესაძლებლობა. ახლა შეიძლება თქვან: თუ პრაქტიკა იწვევს სათანადო მათემატიკურ თეორიების გაჩენას, თითონ ის უზრუნველყოფს მათ ჭეშმარიტებას, და ამიტომ ზედმეტად შეიძლება მიჩნეული იყოს შემდგომი კვლევა-ძიება ლოგიკური დაფუძნების მიმართულებით.

ამ მოსაზრებაზე პასუხის გასაცემად უნდა გავითვალისწინოთ, რომ პრაქტიკას ბრმა მოქმედების ხასიათი კი არ აქვს და ის რა-

ციონალურ და ლოგიკურ შემეცნებას კი არ ეპირისპირება, არამედ მასთან მჭიდროთ დაკავშირებულია. პრაქტიკის პრიმატის ცნობა არ ნიშნავს უტრირებულ «პრაქტიციზმს» და პრაქტიკის მოწყვეტას გაღრმავებულ თეორიულ კვლევა-ძიებისაგან. შედარებითი ჭეშმარიტება, რომელიც ისტორიულად შექმნილ მათემატიკურ თეორიებში იყო, არამცთუ ზედმეტად ხდის მათ შემდგომ განვითარებას, არამედ, პირიქით, ამ განვითარებას მოითხოვს. ამ განვითარების შედეგად შექმნილი უფრო ზუსტი მეცნიერული აპარატი საშუალებას იძლევა უკეთ გამოვარკვიოთ ჭეშმარიტი მხარე ძველი თეორიების, და იმის შემდეგ, როცა უკვე მოვასწარით მეცნიერების ახალი შედეგების გამოყენება, გვიანაა მათი ზედმეტად მიჩნევა (იხ. გვ. 94—96, 135—136). ის, ვინც იმის გამო, რომ ზუსტი გზით დადასტურდა შედეგი, რომელიც წინად არაზუსტი გზით იყო მიღებული, ამ ზუსტ გზას ზედმეტად მიიჩნევს, ამ თავის მსჯელობაში თითონვე უყურებს ამ ზუსტ გზას როგორც სისწორის საბოლოო გამომრკვევს და ამით თავიდანვე სცნობს მის მნიშვნელობას. იმის შემდეგ, რაც სათანადო მეცნიერული თეორიები ჩამოყალიბდა, შეიძლება მათი ჩანასახები ადვილად დავინახოთ ძველ ავტორებთანაც, მაგრამ ეს არ ნიშნავს, რომ ყველაფერი თავიდანვე გვაქვს და მეცნიერების განვითარება ზედმეტი იყო.

ხშირად თანამედროვე მეცნიერების მიხედვით ახდენენ მეცნიერების წარსულის ერთგვარ მოდერნიზაციას და, რასაკვირველია, ამის შემდეგ ყველაფერი უკვე მიაჩნიათ წარსულში მზად. ასეთი მიდგომა არამცთუ დგას ისტორიზმის თვალსაზრისზე, არამედ სწორედ უგულებელყოფს ისტორიას და ისტორიულ განვითარებას. «ნამდვილი და ამიტომ უმარტივესი კავშირები ახალის ძველთან, — ამბობს მარქსი მათემატიკურ ხელნაწერებში, — ყოველთვის მხოლოდ მაშინ გამოჩნდება, როცა თითონ ახალი უკვე იღებს დამთავრებულ ფორმებს»[1]. ჰეგელის იმ ადგილის შესახებ «ლექციებიდან ფილოსოფიის ისტორიაში», სადაც იმაზეა ლაპარაკი, რომ ჩვენ არ უნდა მივაწეროთ ძველ ფილოსოფოსებს დასკვნები და მტკიცებები, რომლებსაც ისინი არ აკეთებდნენ და თავშიც არ მოუდიოდათ, მაგრამ რომელნიც შეიძლება მათ აზრებიდან სწორად იყოს გამოყვანილი, ლენინი თავის ფილოსოფიურ რვეულებში ასეთ ჩანაწერს აკეთებს: «ჩინებულია მკაცრი

---

[1] იხ. კრებული: Марксизм и естествознание, 1933, стр. 158. იხ. აგრეთვე К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. IV, 1933, стр. 35—36; т. XIV, 1931, стр. 360.

ისტორიულობის გამო ფილოსოფიის ისტორიაში, რომ ძველებს არ მივაწეროთ მათი იდეების ისეთი «განვითარება», რომელიც ჩვენთვის გასაგებია, მაგრამ სინამდვილეში ძველებს კიდევ არ ჰქონდათ»[1]. «ძალიან დიდია ცდუნება, — ამბობს ჰეგელი, ძველი ფილოსოფოსების რეფლექსიის ჩვენ ფორმაში გადაჭედვისა». ასეთ მიდრეკილებას წარსულის გადაკეთებისა მომავლის მიხედვით — ერთგვარ ჰისტერონ-პროტერონს, საზოგადოთ ხშირად აქვს ადგილი. როცა, მაგალითად, რაიმე პრობლემის რამოდენიმე შესაძლებელ პასუხთა შორის მოძებნილია ნამდვილი პასუხი, ბევრს ეჩვენება, რომ ასეთი პასუხი წინასწარ იცოდა, და შეეძლო ის ეწინასწარმეტყველა, რადგან სწორედ ის შემთხვევები ახსენდება, როცა ამ პასუხის შესაძლებლობაზე ფიქრობდა და არა სხვა შემთხვევები.

განვითარების შემდგომი საფეხურების ცოდნა საშუალებას იძლევა უკეთ გავითვალისწინოთ განვითარების საერთო მსვლელობა და კანონზომიერება, მაგრამ ეს არ ნიშნავს, რომ უკანა რიცხვით უნდა შესწორდეს თითონ წარსულიც.

ისტორიულისა და ლოგიკურის განუყრელობა არამცთუ აბათილებს და ზედმეტად ხდის ლოგიკურს, არამედ, პირიქით, ემსახურება მის ნამდვილ ხასიათის გამოვლენას. ეს განუყრელობა სწორედ მათ შეეხება და მათ განურჩევლობას არ ნიშნავს. ჩვენ უკვე მოყვანილი გვქონდა წინად მარქსის აზრი იმის შესახებ, რომ ისტორიული განვითარება რაიმე დარგის არ მისდევს ლოგიკურ თანმიმდევრობის გეზს და «ყველა მეცნიერებათა ისტორიული განვითარება მრავალი ჯვარედინი და მოსარები გზით არის ნამდვილ გამოსავალ წერტილთან მიმავალი» (გვ. 94). მაგრამ ეს არამცთუ ლაპარაკობს ისტორიულის და ლოგიკურის განუყრელობის წინააღმდეგ, არამედ სწორედ იმას გვეუბნება, რომ მეცნიერების ისტორიული განვითარება საშუალებას იძლევა ჩავწვდეთ სათანადო საგნის ლოგიკურ საფუძვლებში. ისტორია ხომ არის მსვლელობა წინ დროში და არა უკან. წარსული უნდა გამოყენებული იყოს და არა ბრმად განმეორებული. რაიმე მეცნიერული თეორიის არსებობის ფაქტი წარსულში არ არის საკმარისი იმისათვის, რომ ეს თეორია დავაკანონოთ და მის შეფასებაზე უარი ვთქვათ. ამგვარი უტრირებული «ისტორიზმი» სწორედ ეწინააღმდეგება ნამდვილ ისტორიულ მიდგომას (იხ. გვ. 94—96).

---

[1] Гегель, Сочинения, т. IX, 1932, стр. 45 — 46; В. И. Ленин. Философские тетради, стр. 258.

ისტორიულად გასაგებია, რომ უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვა თავიდანვე ლოგიკურად უნაკლოდ დაფუძნებული ვერ იქნებოდა, და სწორედ შემდგომი განვითარება იყო საჭირო იმისათვის, რომ მტკიცეთ დადგენილი ყოფილიყო ახალი აღრიცხვის ლოგიკური საფუძვლები. საქმე ისეთნაირად არ უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ ან საჭიროა უარვყოთ ძველი უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის მნიშვნელობა, რაკი ის ლოგიკურად სათანადოთ დაფუძნებული არაა, ანდა მკაცრი ლოგიკური დაფუძნება ზედმეტად მივიჩნიოთ.

ძველი უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის მჭიდრო კავშირი პრაქტიკასთან საკმარისია იმისათვის, რომ ის ლოგიკურ მნიშვნელობის მოკლებულად არ მივიჩნიოთ მარტო იმის გამო, რომ მას სათანადო სრული დასაბუთება აკლდა. საქმე სწორედ იმასშია, რომ მოხდენილი იყოს მისთვის მკაცრი ლოგიკური დაფუძნება. ეს დაფუძნება, რასაკვირველია, ისე არ უნდა გავიგოთ, რომ კანონად მივიჩნიოდ ყველაფერი ის, რაც წინად იყო გაკეთებული, და მხოლოდ გარეგნულად გავამაგროთ ძველი შენობა. ასე რომ იყოს საქმე, ახალი დაფუძნება არც დაგვჭირდებოდა და, საზოგადოთ, ასეთი გარეგნული გამაგრება არც არის დაფუძნება. მათემატიკური ანალიზის მკაცრი ლოგიკური დაფუძნება დაკავშირებულია მთელი მასალის ღრმა კრიტიკულ გადასინჯვასთან და თითონ მათემატიკური ანალიზის განვითარებასთან. დაფუძნება დაკავშირებულია სათანადო კონკრეტულ მათემატიკურ მასალასთან და არ უნდა იყოს მასთან დაპირისპირებული.

საქმე ისე არ უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ ერთის მხრით გვაქვს კონკრეტული მათემატიკური მასალა ლოგიკურ სიმტკიცეს მოკლებული, ხოლო, მეორეს მხრით, ერთგვარი დამატების სახით მისი გარედან დამუშავება ლოგიკის აპარატურის საშუალებით. დაფუძნების გაუმჯობესება გამომხატველია თითონ სათანადო **მათემატიკურ** თეორიის ფარგლებში **განვითარებისა**. რასაკვირველია, ეს დაფუძნების საქმე მჭიდროდ დაკავშირებულია ლოგიკასთან და ფილოსოფიასთან, მაგრამ მათემატიკური თეორიების კავშირი ლოგიკასთან და ფილოსოფიასთან არ ნიშნავს იმას, რომ ამით ისინი მათემატიკური თეორიის ხასიათს კარგავენ—საქმე ხომ შეეხება სწორედ **მათემატიკის** კავშირს ფილოსოფიასთან და ლოგიკასთან. მეორეს მხრით, ეს კავშირი არის ნამდვილ ფილოსოფიასთან და ლოგიკასთან, ისე რომ მათემატიკას არ სჭირდება ჰქონდეს თავის სპეციალური მოშინაურებული „მათემატიკური“ ფილოსოფია. ზოგად

ფილოსოფიური ცნებები მათემატიკაში უნდა იყოს გაგებული თავის ნამდვილი და არა «მათემატიზირებული» მნიშვნელობით.

მათემატიკური თეორიების ლოგიკურ დაფუძნებისათვის სრულებით საჭირო არ არის მათემატიკა «გადავიტანოთ» ფილოსოფიაში და განვიხილოთ ორი მათემატიკა: ერთი ფილოსოფიაში გათქვეფილი და მეორე ფილოსოფიისადმი უცხო.

საინტერესოა ამ მხრივ შევადაროთ ერთი მეორეს ჰეგელის და მარქსის შეხედულებანი. ჰეგელისათვის მათემატიკის დაფუძნების საკითხები დაკავშირებულია კვლევა-ძიების ფილოსოფიის სფეროში გადატანასთან. თავისივე ცნებების შინაარსი და მათი დიალექტიკური განვითარება მათემატიკოსებმა, ჰეგელის მიხედვით, ფილოსოფიიდან უნდა შეიტყონ. «...მათემატიკური განმარტებანი,—ამბობს ჰეგელი[1],—როგორც მაგალითად უსასრულო, მისი დამოკიდებულებანი, უსასრულოდ მცირე, მამრავლები, ხარისხები და ა. შ., თავის ნამდვილ ცნებას პოულობენ თითონ ფილოსოფიაში. სრულებით შემცდარი იქნებოდა მათი მათემატიკიდან გადმოღება, რომელშიაც ისინი აღებული არიან ჭეშმარიტ გაგების გარეშე და ხშირად უაზროდაც. ამ ცნებების შესწორება და მათი აზრის დადგენა უფრო ფილოსოფიიდან არის მოსალოდნელი. მხოლოდ აზრის სიზარმაცე, უნდა რა განთავისუფლდეს ცნებათა განმარტების შრომისაგან, მიმართავს ფორმულებს, რომელნიც აზრის უშუალო გამოხატულებასაც არ წარმოადგენენ, და მათ უკვე მზა სქემებს»[2]. მარქსი კი, პირიქით, ლოგიკურად მკაცრ

---

[1] Гегель. Сочинения, т. II, 1934, стр. 54.

[2] იხ. აგრეთვე შემდეგი ადგილი ჰეგელიდან: «...რიცხვები წარმოადგენენ ცნებისადმი უცხო მასალას, საანგარიშო ოპერაცია არის გარეგნული შეერთება ან გაყოფა, მექანიკური ხერხი...» (Гегель. Сочинения, т. VI, 1939, стр. 131). ნამდვილად რიცხვის ცნება მაინც ცნებაა და საანგარიშო პროცედურებს უნდა ჰქონდეთ თავის შინაარსობრივი ლოგიკური დაფუძნება. მაგრამ როცა ცდილობენ, მაგალითად, თვით ლოგიკას მისცენ მათემატიკური აღრიცხვის სახე, თავს იჩენს შინაარსობრივობის განდევნის მიდრეკილება, მაგრამ მათემატიკის ამგვარი გამოყენებით თვით მათემატიკის ხასიათიც მახინჯდება (შეად. გვ. 130, 157—158; თავი III, § 11). მათემატიკას, როგორც ყოველგვარ მეცნიერებას, საქმე აქვს ცნებებთან. მაგრამ მათემატიკური ცნებები, თითონ თავის ხასიათის მიხედვით, დაკავშირებული არიან ერთნაირ გარეგნულ გარკვეულობის გამოთქმასთან. ამიტომ როცა ცდილობენ თითონ ლოგიკის მათემატიზაციას, ამასში მჟღავნდება ცდა სათანადო ცნებების შინაგანი შინაარსის უგულებელყოფისა და ამასთან დაკავშირებულია თითონ მათემატიკურ ცნებების ხასიათის დამახინჯება, მათთვის ცნების ხასიათის და საკუთარ შინაარსის წართმევა და მათი დაყვანა უბრალო სიმბოლოებზე.

და შინაარსობრივ საფუძველზე დაყრდნობილ უსასრულოდ მცირეთა თეორიას უკავშირებს იმას, რომ სათანადო გარემოებანი მათემატიკური გზით იყოს მიღებული და არა მხოლოდ მეტაფიზიკური ახსნა-განმარტების საშუალებით (გვ. 18, 46, 79 და სხ.). ძველი თეორიების კრიტიკის დროს, რომლებშიაც ერთგვარად უგულებელყოფილი იყო საანგარიშო აპარატის შინაარსობრივ საფუძველზე დაყრდნობა, მარქსი მიუთითებს სათანადო დაფუძნების არამათემატიკურ ხასიათზე. «ნიუტონი არ განმარტავს x, y, etc. ნაზრდებს მათემატიკური გამოყვანის საშუალებით, არამედ ერთბაშად აშტემპელებს მათ დიფერენციალებში $\dot{x}$, $\dot{y}$, etc...» (გვ. 68). «და როგორ იყო იქ, პირველ [ისტორიულად] მეთოდში, მიღებული გამოსავალი პუნქტი დიფერენციალურ სიმბოლოებისათვის, როგორც ოპერატიულ ფორმულებისათვის? ცხად ან ფარულ მეტაფიზიკურ წინამძღვრების საშუალებით, რომლებსაც თავის მხრივ მივყავართ მეტაფიზიკურ, არამათემატიკურ დასკვნებისაკენ: ჩნდება ნაძალადევი ამოშლა ზოგიერთ გამოყვანის გზაზე მდგომ და ამავე დროს თვით მისგანვე გაჩენილ სიდიდეების» (გვ. 43).

თითონ მათემატიკური თეორიების ხასიათი მოითხოვს მათ შინაარსობრივ დაფუძნებას. ფორმალისტურ მიდგომას მარქსი აკრიტიკებს თვით მათემატიკური თეორიების და მათი ინტერესის თვალსაზრისით, და არა თვლის ამ მიდგომას თითონ მათემატიკისათვის, როგორც ასეთისათვის, აუცდენელს. ჰეგელის საბუთებიც, მიმართული წმინდა ალგორითმული თვალსაზრისის წინააღმდეგ, თავის ობიექტური მნიშვნელობით ნამდვილად ლაპარაკობენ გარკვეულ ნაკლებზე სათანადო მათემატიკური თეორიების დაფუძნების თვალსაზრისით, და არა ისეთ ნაკლზე, რომელიც თითონ მათემატიკის თავისებურებასთან დაკავშირებულია. თვით მათემატიკა ვერ იქნება იმისათვის პასუხისმგებელი, რაშიაც, პირიქით, მჟღავნდება ერთგვარი გადახრა მათემატიკური თეორიების ნამდვილი დაფუძნების მოთხოვნილებიდან.

მათემატიკის და ფილოსოფიის ზემოთგანხილულ ასპექტში ურთიერთ დამოკიდებულების საკითხის გაშუქებას ხელს შეუწყობს ანალოგიის გატარებას მატერიის ფილოსოფიურ და ფიზიკურ ცნებებს შორის დამოკიდებულებასთან. მატერიის ფილოსოფიური და ფიზიკური ცნება ერთმანეთთან განუყრელად დაკავშირებულია და მათ შორის დამოკიდებულების დასამყარებლად არ გვჭირდება რაიმე გარდამავალი, დამხმარე საფეხური (უკანასკნელისადმი მიმართვა გამო-

ხატავს სწორედ იმ ლოგიკურად ყალბ მდგომარეობას, რომელსაც გამოიწვევს მათი ერთიმეორისაგან მოწყვეტა: მათ შორის დამოკიდებულების დასამყარებლად დაგვჭირდება გარკვეული დამატებითი ინსტანცია (მატერიის ცნების სახით ფიზიკის «საკუთრივი» ფილოსოფიის თვალსაზრისით—ფიზიკის ასპექსტში ზოგადად დამუშავებულ მატერიის ფილოსოფიურ ცნების), რომელსაც მაშინ თავის მხრივ კვლავ ამგვარივე ინსტანცია დასჭირდება და ა. შ. უსასრულოდ). ესათუის ფიზიკური სახე მატერიისა განუყრელია მატერიის ზოგად ფილოსოფიურ ცნებასთან. «მატერია და მოძრაობა, — ამბობს ენგელსი[1], — შ ე ი ძ ლ ე ბ ა შევიცნოთ მხოლოდ ნივთიერების და მოძრაობის ცალკეული ფორმების შესწავლის გზით; რამდენადაც ჩვენ შევიცნობთ უკანასკნელებს, იმდენად ჩვენ შევიცნობთ მატერიას და მოძრაობას, რ ო გ ო რ ც ა ს ე თ ე ბ ს». ფიზიკას არა აქვს თავის საკუთარი ფილოსოფიური ცნება მატერიის, თავის შემცვლელი მატერიის ზოგად ფილოსოფიურ ცნებისა. იმისათვის, რომ ფ ი ზ ი კ ა ს საშუალება ჰქონდეს შეისწავლოს მ ა ტ ე რ ი ი ს სხვადასხვა სახე, მას არ სჭირდება მატერიის ფილოსოფიური ცნების გაუქმება, ისევე როგორც ეს უკანასკნელი არ ითხოვს იმას, რომ ფიზიკამ თავის სახე დაკარგოს. ფილოსოფიის და ფიზიკის კავშირი სწორედ მათ, როგორც ასეთებს, შეეხება და არ ხდება რომელიმე მათგანის გაუქმების ხარჯზე.

დაუბრუნდეთ კვლავ მათემატიკის დაფუძნების პრობლემას. ჩვენ ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ ფილოსოფიის და ლოგიკის მნიშვნელობა მათემატიკისათვის არ მოითხოვს იმას, რომ მათემატიკური თეორიები მათემატიკის ფარგლებიდან გამოვიყვანოთ. საქმე სწორედ შეეხება ფილოსოფიის და ლოგიკის აუცილებლობას მ ა თ ე მ ა ტ ი კ უ რ კვლევა-ძიებისათვის.

ცდა მათემატიკის დამოუკიდებლობის დადგენისა ლოგიკისაგან და ფილოსოფიისაგან ლ ო გ ი კ უ რ ა დ ყალბ მდგომარეობას ქმნის.

არ შეიძლება მათემატიკასთან დაკავშირებული ფილოსოფიური საკითხები იმით მოვაგვაროთ, რომ მათემატიკა მოვწყვიტოთ ფილოსოფიას, შემოვიფარგლოთ მხოლოდ «კონკრეტულ მათემატიკურ საგნებით» და უგულებელვყოთ სათანადო ზოგად ცნებების ლოგიკური ბუნება. ამაშიაც მჟღავნდება გარკვეული, მაგრამ ამ შემთ-

---

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. XIV, стр. 355.

ხვევაში ლოგიკურად უვარგისი, ცდა სათანადო ფილოსოფიურ პრობლემების გადაწყვეტისა, გარკვეული ფილოსოფიური კონცეპცია, დაკავშირებული ცალკეულის ზოგადისაგან მოწყვეტასთან და ა. შ.. არ შეიძლება მათემატიკა დავაყენოთ განურჩეველ მდგომარეობაში მასთან დაკავშირებულ ფილოსოფიურ პრობლემების გადაწყვეტის მიმართ იმით, რომ მოუწოდოთ უგულებელყონ საქმის ფილოსოფიური მხარე და ის ვითომდაც ვერ დაინახონ. «ბუნებისმეტყველებს ეჩვენებათ, — ამბობს ენგელსი[1], — რომ ისინი ფილოსოფიისაგან თავისუფლდებიან, როცა უგულებელყოფენ ან აგინებენ მას. მაგრამ რადგან ისინი აზროვნების გარეშე ერთ ნაბიჯსაც ვერ გადადგავენ, აზროვნებისათვის კი აუცილებელია ლოგიკური განმარტებანი, ხოლო ამ განმარტებებს ისინი გაუფრთხილებლად სესხულობენ ეგრეთწოდებულ განათლებულ ხალხის მოარულ თეორიულ მარაგიდან, რომლებზედაც ბატონობენ დიდი ხანია განვლილი ფილოსოფიური სისტემების ნარჩენები, ან ფილოსოფიის სავალდებულო საუნივერსიტეტო კურსების ნამცეცებისაგან... ანდა ყოველგვარი ხასიათის ფილოსოფიური ნაწარმოებების არაკრიტიკულ და არასისტემატიკურ კითხვისაგან, — ამიტომ საბოლოო შედეგში ისინი მაინც ფილოსოფიის ტყვეობაში აღმოჩნდებიან, მაგრამ, სამწუხაროთ, მეტწილად ყველაზე ცუდ ფილოსოფიის; და ის ადამიანები, რომელიც განსაკუთრებით გულმოდგინეთ აგინებენ ფილოსოფიას, ხდებიან ყველაზე ცუდ ფილოსოფიურ სისტემების ყველაზე ცუდ ვულგარიზირებულ ნარჩენების მონები».

შეიძლება თქვან, რომ ფილოსოფია საჭიროა არა თითონ მათემატიკისათვის, არამედ მათემატიკის დაფუძნებისათვის. მაგრამ **მათემატიკის** დაფუძნების პრობლემატიკა თითონ ამჟღავნებს ფილოსოფიის მნიშვნელობას სწორედ მათემატიკისათვის. ეს დაფუძნება ხომ თითონ მათემატიკას შეეხება და არა კვლავ მათემატიკის დაფუძნებას.

მათემატიკოსმა, რომელსაც უნდა იზოლირება ფილოსოფიიდან, იმ მოსაზრებაზე, რომ ამ მომენტში თითონ ის ფილოსოფოსობს, შეიძლება უპასუხოს, რომ ფილოსოფიურ მსჯელობას მათემატიკის შესახებ ის აწარმოებს ფილოსოფირების ინტერესით და არა თითონ მათემატიკის საჭიროებისათვის, და ამიტომ მისი პოზიცია სათანადო არგუმენტებისაგან ხელუხლებელი რჩება. მაგრამ ის ხომ ფი-

[1] Ibid., 415.

ლოსოფოსობს სწორედ სათანადოთ გაგებულ მათემატიკის ინტერესებში, მისი ფილოსოფიისაგან გამიჯვნის ინტერესის გამო; ის ხომ სწორედ ზურგს აქცევს ფილოსოფიას და ფილოსოფოსობა არ უნდა. როცა ის ფილოსოფიის გაუფასურობას ცდილობს, პირველ რიგში უნდა გააუფასუროს საკუთარი ფილოსოფია.

აქ შეიძლება გამოყენებული იყოს კ. მარქსის სიტყვები, მართალია სხვა კონტექსტში ნათქვამი: «თქვენ არ შეგიძლიათ გააუქმოთ ფილოსოფია მისი სინამდვილეში განხორციელების გარეშე» [1].

თუ იტყვიან, რომ ფილოსოფიურ მსჯელობას მათემატიკის ფილოსოფიისაგან იზოლირების მიზნით მხოლოდ ერთხელ აწარმოებენ და ისიც არა საკუთრივ ფილოსოფიური მოსაზრებით, არამედ მხოლოდ გარკვეული «სულიერი განწყობის» შექმნის მიზნით [2], უპასუხებთ, რომ ამით არამცთუ აუქმებენ ზემოთაღნიშნულ სიძნელეს: თუ ფილოსოფიის განდევნას აპირობენ, ჯერ საჭიროა მისი განდევნა თითონ ამ განდევნის ცდისაგან და ა. შ., არამედ მხოლოდ ცდილობენ ამ სიძნელის «მოშინაურებას», რითაც კვლავ ადასტურებენ მის არსებობას.

მათემატიკური თეორიები და მათი დაფუძნება განუყრელად დაკავშირებულია ფილოსოფიურ კვლევა-ძიებასთან. ეს არამცთუ აუქმებს მათ მათემატიკურ ხასიათს, არამედ აქ სწორედ მათემატიკური თეორიები აქვთ მხედველობაში; მაგრამ მეორეს მხრით, იმისათვის, რომ ამათუიმ თეორიას მ ა თ ე მ ა ტ ი კ უ რ ი ხასიათი ჰქონდეს, არ არის აუცილებელი, რომ მასში მონაწილე ყოველი ცნება პირველად შემოყვანილი იყოს თითონ ამ მათემატიკური თეორიის შიგნით. ისეთი ცნება, როგორც, მაგალითად, ნატურალური რიცხვისა, პირველ რიგში ზოგად ფილოსოფიურ ასპექტში უნდა იყოს განხილული. ამ ცნების მათემატიკური გამოვლინება არამცთუ უკარგავს მას ზოგად—ფილოსოფიურ ცნების ხასიათს, არამედ აქ სწორედ გარკვეულ ფილოსოფიურ ცნებაზეა ლაპარაკი.

ჩვენ ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის განვითარების პროცესში სრულებით ბუნებრივად მოხდა ამ აღრიცხვის ლოგიკური დაფუძნების განმტკიცება. დაფუძნების ნაკლები აღრიცხვის განვითარების პირველ ხანებში იმის საფუძველს კი არ იძლეოდნენ, რომ თითონ ახალი აღრიცხვა ხელაღებით უარყოფილი-

---

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. I, стр. 405.

[2] იხ., მაგ., А. Гейтинг. Обзор исследований по основаниям математики, 1936, стр. 20.

ყო, არამედ სწორედ მისი უფრო მტკიცედ დაფუძნების საჭიროება-ზე ლაპარაკობდნენ.

თუ ძველი თეორია უკუგდებული არ იყო, ეს არ ნიშნავს, რომ ის პირვანდელი სახით იყო დატოვებული და მის დაფუძნებაზე ზრუნვა ზედმეტად მიჩნეული. აქ შეიძლება გავიხსენოთ ერთი ადგილი ლენინის ფილოსოფიურ რვეულებიდან, რომელიც, მართალია, სხვა პრობლემატიკის განხილვასთან დაკავშირებით არის გამოწვეული, მაგრამ სავსებით გამოსაყენებელია იმ საკითხის მიმართ, რომელსაც ჩვენ ახლა განვიხილავთ. «პლეხანოვი, — ამბობს ლენინი,[1] — აკრიტიკებს კანტიანელობას (და აგნოსტიციზმს საერთოდ) უფრო ვულგარულ მატერიალისტურ, ვიდრე დიალექტიკურ მატერიალისტურ თვალსაზრისით, რამდენადაც ის მხოლოდ a limine [ზღურბლიდან] უარყოფს მათ მსჯელობებს და არა ასწორებს (როგორც ჰეგელმა გაასწორა კანტი) ამ მსჯელობებს მათი გაღრმავებით, განზოგადოებით, გაფართოვებით, ყველა და ყოველგვარ ცნებების კავშირის და გადასვლების ჩვენებით».

ისეთ მეცნიერულ თეორიის კრიტიკას, რომელსაც ისტორიულად გარკვეული ღრმა საფუძველი აქვს, უნდა ჰქონდეს არა მარტო ნეგატიური, არამედ ერთგვარი დადებითი ხასიათი, საჭიროა თითონ სათანადო საგნის შიგნით შეჭრა და მისი გაუმჯობესება და არა უბრალოდ მისი უკუგდებისაკენ მოწოდება. საზოგადოთ, შემეცნებას აქტიური და შემოქმედებითი ხასიათი აქვს, ის საგანს მარტო პასიურ განსჭვრეტით კი არ სწავლობს, არამედ ცოცხალი პრაქტიკის პირობებში ამ საგანზე ზემოქმედების საშუალებით.

უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის წარმოშობა ღრმა პრაქტიკული საჭიროებით იყო გამოწვეული. ასეთ პირობებში ყველაზე ნაკლებად შეიძლება ლაპარაკი ამ აღრიცხვის უკუგდებაზე მარტო იმ მიზეზით, რომ პირველ ხანებში ის მკაცრად დაფუძნებული არ იყო. კრიტიკული კვლევა-ძიება დაფუძნების მხრივ იწვევდა სწორედ ამ დაფუძნების გაუმჯობესებას და არა ძველი თეორიის უბრალოდ უკუგდებას. მაგრამ, თუ ძველი თეორია უკუგდებული არ იყო, ეს არ ნიშნავს, რომ ის იმავე სახით იყო დატოვებული და მისი შემდგომი განვითარება და დაფუძნების განმტკიცება ზედმეტად მიჩნეული. საქმე ხომ სწორედ ამ მის შემდგომ განვითარებას შეეხება. არც ერთი საგანი არ არის უნაკლო თავის გაჩენისთანავე. მაგრამ, თუ უსას-

[1] В. И. Ленин. Философские тетради, стр. 173.

რულოდ მცირეთა თეორიის დაფუძნების ნაკლები პირველ ხანებში არ უნდა ყოფილიყო შეფასებული, როგორც თვით თეორიის მიუღებლობის ნიშანი, ეს არ ნიშნავს, რომ შესაძლებელი იყო თეორიის ამავე სახით დ ა ტ ო ვ ე ბ ა. დასაგმობი იქნებოდა არა თეორიის პირვანდელი მდგომარეობა, არამედ ცდა მისი შემდეგშიც ამ სახით დატოვებისა.

მარქსი დიდ მნიშვნელობას ანიჭებს უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის მკაცრ დაფუძნებას. თვით მისი კვლევა-ძიებანიც მათემატიკაში ამასთან დაკავშირებულია. მარქსი ილაშქრებს იმის წინააღმდეგ, რომ მათემატიკაში უგულებელყოფილი იყოს სრული ლოგიკური სიზუსტე და მხოლოდ სათანადო მიახლოვებაზე ზრუნავდნენ. ამასთან დაკავშირებულია მარქსის კრიტიკაც ძველი თეორიებისა.

ლენინი თავის კონსპექტში ჰეგელის «ლოგიკის მეცნიერებისა» საკმაოდ ჩერდება, სათანადო ამონაწერების მოყვანით, იმ ადგილებზე, რომლებშიაც ლაპარაკია უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დაფუძნების საჭიროების შესახებ[1].

ჰეგელი აღნიშნავს, რომ მათემატიკამ ჯერ ვერ მოახერხა გაემართლებინა ცნების საშუალებით უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის გამოყენება. «მოწოდებული გამართლებანი დამყარებულია საბოლოო ანგარიშში შედეგების სისწორეზე..., რომელნიც სხვა საფუძვლებით დამტკიცებულია, და არა საგნის და იმ ოპერაციის, რომლების საშუალებით მიღებულია ეს შედეგები, ნათელ ხასიათზე და კიდევაც ამაზე მეტი: მოყვანილი გამართლებანი შეიცავენ იმის ცნობას, რომ თვით ოპერაცია სწორი არაა»[2].

საინტერესოა, რომ ლენინის გადაცემაში ამ ადგილისა (რომელზედაც გაკეთებულია მინაწერი: NB (nota bene—კარგად შენიშნე), ვპოულობთ: «აქამდე გამართლება მდგომარეობდა მ ხ ო ლ ო დ შედეგების სისწორეში»; ამით გამოთქმულია ერთგვარი განსხვავება ჰეგელის მიდგომისაგან. ჰეგელისათვის დასაწუნია სწორედ ის, რომ ანგარიში გაწეული აქვს ლოგიკურად არა ზუსტი დაფუძნების საშუალებით მიღებულს სისწორეს შედეგისა, რაზედაც საბოლოო ანგარიშში დამყარებულია სათანადო გამართლება. ლენინის მიერ კი აზრი იმგვარად გამახვილებულია, რომ კრიტიკა იმას კი არ უნდა შეეხოს, რომ მიღებული იყოს მხედველობაში არა ზუსტი გზით

---

[1] В. И. Ленин. Философские тетради, стр. 116—117.

[2] Гегель. Сочинения, т. V, стр. 271.

აღმოჩენილი სისწორე შედეგისა, არამედ იმ შემთხვევას, როცა მ ხ ო ლ ო დ ამით კმაყოფილდებიან.

მოგვყავს მეორე ადგილი, რომლიდანაც ლენინს აგრეთვე გაკეთებული აქვს ამონაწერი: «...მაგრამ იმაში, რაც ესმით მათემატიკური გარკვეულობის ქვეშ, სრულებით მნიშვნელობას კარგავს ყოველგვარი განსხვავება მეტ ან ნაკლებ სიზუსტეს შორის, ისევე როგორც ფილოსოფიაში არ შეიძლება ლაპარაკი იყოს მეტ ან ნაკლებ ალბათობას შესახებ, არამედ მხოლოდ ჭეშმარიტებაზე. თუ უსასრულოთა მეთოდი და გამოყენება წარმატებით მართლდება, მაინც ზედმეტი არაა, მიუხედავად ამისა, გამართლების მოთხოვნა; ასეთი მოთხოვნილება გვეჩვენება არა იმდენად ზედმეტად, როგორც მოთხოვნილება საკუთარი ცხვირით სარგებლობის უფლების დამტკიცებისა. ვინაიდან მათემატიკურ შემეცნებაში, რომელიც მეცნიერულ შემეცნებას წარმოადგენს, არსებითი მნიშვნელობა აქვს დამტკიცებას, ხოლო იმ შედეგების მიმართ, რომელსაც იღებენ, აღმოჩნდება, რომ მკაცრი მათემატიკური მეთოდი არა ყველა მათთვის იძლევა დამტკიცებას წარმატებისაგან, რომელიც, მაინც ამის მიუხედავადაც არის მხოლოდ გარეგანი დამტკიცება»[1]. შეიძლება აღინიშნოს, რომ აქაც, დაფუძნების მნიშვნელობის გათვალისწინებასთან ერთად ადგილი აქვს ერთგვარ შეუფასებლობას პრაქტიკისა, რომელიც მხოლოდ გარეგნულად არის გაგებული და დაკავშირებულია მხოლოდ გარეგნულ დემონსტრაციებთან, წარმატებებთან და სხ.; ნამდვილად მეცნიერულ შედეგების გაჩენა გარკვეულ პრაქტიკულ საჭიროების მიხედვით გასაგებად ხდის თითონ საკითხის დასმას მათი ზუსტი ლოგიკური დაფუძნების შესახებ.

საქმე არც ისე უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ არასაკმაოდ დაფუძნებული ძველი თეორიები უბრალო უკუგდების ღირსია, და არც ისე, რომ, რაკი მათემატიკური თეორიები არსებობენ, ამიტომ საფუძვლების გარკვევის საკითხები ამ თეორიების შემოწმებას და დაფუძნებას კი არ უნდა შეეხოს, არამედ მხოლოდ იმის გამორკვევას, თუ როგორ არიან ეს უკვე არსებული თეორიები შესაძლო (ასეთი მოტივები ძლიერი თუ შერბილებული სახით გვხვდება, კერძოთ, სხვადასხვა კანტიანურ კონცეპციებში მათემატიკის შესახებ).

სხვადასხვა არსებული თეორიების ლოგიკური შეფასების დროს არ შეიძლება ეს თეორიები დაკანონებულად მიიჩნიო იმ სახით, რა

---

[1] Ibid., 273—274.

სახითაც ისინი მოცემული არიან, მარტო იმის გამო, რომ ისინი არსებობენ. საქმე ხომ სწორედ მათ შეფასებას და დაფუძნებას შეეხება. ამათუიმ მათემატიკურ თეორიის დაფუძნებისას არ შეიძლება დაეყრდნო იმას, რომ მათემატიკოსები უკვე არსებობენ და საჭირო საქმეს თითონ გააკეთებენ — მაშინ ეს მათემატიკოსებიც შეძლებენ კვლავ მათემატიკოსებზე მითითებას და ა. შ.. მათემატიკის ამათუიმ დარგის დაფუძნება დაკავშირებული უნდა იყოს თითონ კონკრეტულ მათემატიკური მასალის შიგნით შეჭრასთან, აქტიურ მათემატიკურ საქმიანობასთან და არა ამ მათემატიკურ დარგის პასიურ მიღებასთან და მხოლოდ ამის შემდეგ სათანადო დასკვნების გაკეთებასთან.

11. ფორმალისტური კონცეპციების კრიტიკა

უსასრულოდ მცირეთა თეორიის განვითარების პირველ ხანებში, ნაცვლად თეორიის დაფუძნებასთან დაკავშირებულ ლოგიკურ პრობლემების მოგვარებისა და სათანადო ცნებათა სისტემის დადგენისა, სიძნელეების გადალახვას იმ მხრივ ცდილობდნენ, რომ საქმე მოეგვარებინათ წმინდა ალგორითმულ ასპექტში და აემოძრავებინათ სათანადო ფორმალური აპარატი. ასეთი ტენდენცია განსაკუთრებით ძლიერია ლეიბნიცთან. მისთვის ძირითადი მნიშვნელობა აქვს გარკვეულ საალრიცხვო აპარატის მოცემას, რომელმაც თითონ უნდა განსაზღვროს მასში მონაწილე ტერმინების ხასიათი. ნაცვლად იმისა, რომ ჯერ გარკვეული იყოს თეორიის ძირითად ცნებების შინაარსი და ამის საფუძველზე იყოს აგებული სათანადო საალრიცხვო აპარატი, ადრევე ასწრებენ ამ აპარატის მოწოდებას, ხოლო მასში მონაწილე ტერმინები გვევლინებიან მხოლოდ გარკვეულ სიმბოლოების სახით, რომელნიც იკავებენ შესაფერის ადგილს.

ჩვენ ზემოთ განხილული გვქონდა მარქსის დახასიათება ამგვარი მიდგომისა. მარქსი აღნიშნავდა, რომ ამ შემთხვევაში დიფერენციალური გამოსახულებანი ერთბაშად ხდებიან ოპერატიულ სიმბოლოებად უიმისოდ, რომ გამოვლინებული იყოს მათი ალგებრული წარმოშობა; მათ ადრევე გულისხმობენ, როგორც არსებულს, თუმცა არ იყო დახასიათებული ის, რის არსებობაზეც უკვე ლაპარაკობენ, და შემდეგ ცდილობენ მათ მეტაფიზიკურ გარკვევას; ისინი არ გამოიყვანებიან, არამედ წასწრებულად არიან აღებული (იხ. გვ. 207—208).

თანამედროვე მათემატიკაშიც სიმრავლეთა თეორიისა და არითმეტიკის დაფუძნებასთან დაკავშირებულ დაბრკოლებათა, და კერ-

ძოთ სიმრავლეთა თეორიის წინააღმდეგობათა ზეგავლენით, ვხვდებით ისეთ მიმართულებებს, რომელიც ცდილობენ განდევნილი იყოს ამ დარგებიდან შინაარსობრივობა, მათ მიეცით წმინდა ფორმალისტური ხასიათი და დაყვანილი იყვნენ ცალიერ სიმბოლოებზე წარმოებულ პროცედურებზე. ისახავენ მიზნად არითმეტიკისათვის, სიმრავლეთა თეორიისათვის და თითონ ლოგიკისათვის აქსიომატიურ თეორიის სახის მიცემას და მათთვის საგნობრივი ხასიათის წართმევას.

უნდა ითქვას, რომ ასეთი მიდგომა ვერ აღწევს მიზანს სათანადო თეორიების დ ა ფ უ ძ ნ ე ბ ი ს თვალსაზრისით. რამდენადაც საკითხი დგას იმ სიძნელეებისაგან განთავისუფლების შესახებ, რომლებისაკენაც მიგვიყვანს სათანადო გაგება ამათუიმ ცნებებისა და ა. შ., საქმე უნდა დაკავშირებული იყოს თვით ამ ცნებების განხილვასთან, და არა უბრალოდ უგულებელვყოთ ისინი და დავდგეთ, საზოგადოთ, თითონ ცნებების და შინაარსობრივობის განდევნის თვალსაზრისზე, თუნდაც აღებულ შემთხვევისათვის. ამით, პირიქით, დაადასტურებდნენ ამ სიძნელეების აუცდენლობას და თითონ ისინი გადაიქცეოდნენ დადებითი სახით მომქმედ ფაქტორად, რომელიც გვაიძულებს მოქმედების გარკვეული გეზი ავირჩიოთ.

როცა, მაგალითად, სიმრავლის ც ნ ე ბ ა ს თ ა ნ დაკავშირებით საჭიროა თავიდან მოცილება გარკვეულ დაბრკოლებების, ეს ვერ განხორციელდება თითონ სიმრავლის ცნების განდევნით და მისი შეცვლით გარკვეულ ფორმალურ წესებისადმი დაქვემდებარებულ სიმბოლურ კონსტრუქციებით. ამით, პირიქით, დაადასტურებდნენ სიმრავლის ცნებისაგან სათანადო დაბრკოლებათა მოუშორებლობას. ეს იქნება მხოლოდ სიძნელეებისაგან გაქცევის ცდა, მაგრამ, როგორც სამართლიანად შენიშნავს ჰეგელი, გამქცევი კიდევ თავისუფალი არაა, რადგან ის თავის გაქცევაში კვლავ იმითაა დაპირობებული, რისაგანაც გარბის[1]. არ შეიძლება ამათუიმ თეორიის დ ა ფ უ ძ ნ ე ბ ა მიღწეული იყოს მისგან შინაარსობრივობის განდევნით.

რასაკვირველია, ფორმალურ მხარეზე მითითება ამათუიმ დარგში ფორმალიზმს არ ნიშნავს. თითონ მარქსი, როგორც ჩვენ ზემოთ დავინახეთ (გვ. 199—206), დიდ ყურადღებას აქცევს დიფერენციალური აღრიცხვის ფორმალური აპარატის საკითხს. მაგრამ მარქსი საჭიროდ თვლის ამ აპარატისათვის სათანადო შინა-

[1] **Гегель. Сочинения, т. I, стр. 161.**

არსობრივ დასაყრდენს; მხოლოდ ამ გზით შეიძლება გარკვეული იყოს თითონ ფორმალური აპარატის ნამდვილი ხასიათი და მნიშვნელობა. ზემოთ მოყვანილი იყო ამონაწერები მარქსის მათემატიკურ ხელნაწერებიდან, რომელნიც ამ საკითხს ეხება. აქ შეიძლება კიდევ რამდენიმე მოვიყვანოთ. «...გადაქცევა Δx-ის dx-ად ან $\dot{x}$-ად აპრიორი იგულისხმება, ნაცვლად იმისა, რომ იყოს მათემატიკურად გამოყვანილი; აქედან შემდგომი მისტიკური უკუგდება წევრებისა ბინომის დაშლაში» (გვ. 18). «...რადგან ეს გადატრიალება მეთოდისა გამოწვეულია uz ფუნქციის ალგებრული მოძრაობით, თითონ ის უნდა იყოს ალგებრულად დასაბუთებული» (გვ. 25). «... აქ, მაშასადამე, სადაც $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ ნაჩვენებია თავის წარმოშობაში, $f'(x)$ არავითარ შემთხვევაში არ მიიღება სიმბოლოს $\frac{dy}{dx}$ საშუალებით, არამედ, პირიქით, ეს დიფერენციალური გამოსახულება $\frac{dy}{dx}$ მონახულია როგორც სიმბოლიური ეკვივალენტი უკვე წარმოებულ x-ის ფუნქციისა. მაგრამ როგორც კი ეს შედეგი უკვე მიღებულია, ჩვენ შეგვიძლია მოვიქცეთ შებრუნებით» (გვ. 49).

ფორმალისტურ მიდგომას გამოხატავს არა ამათუიმ ალგორითმულ აპარატით სარგებლობა, არამედ ასეთ აპარატის წასწრებულად აღება და ცდა მასში შემავალ ტერმინების უკანა რიცხვით მისივე საშუალებით განსაზღვრისა. ეს ქმნის ლოგიკურად ყალბ მდგომარეობას. ფორმალისტური მიდგომა არამც თუ ვერ უზრუნველყოფს სათანადო თეორიების ლოგიკურ დაფუძნებას, არამედ თითონ დაავადებულია ლოგიკური ნაკლებით.

წმინდა ალგორითმულ თვალსაზრისისათვის დამოკიდებულება უსწრებს ამ დამოკიდებულებაში მყოფ საგნებს და თითონ შემოყავს ისინი. ასეთ პირობებში საგნები, რომლებს შორის განხილულია დამოკიდებულება, უნდა წარმოვიდგინოთ, როგორც ცალიერი ადგილები, რომელნიც შემდეგ თითონ დამოკიდებულების საშუალებით უნდა იყვნენ შევსებული ე. ი. კვლავ რჩებიან როგორც ცალიერი ადგილები. როცა დამოკიდებულებაში მყოფი საგნები თვით დამოკიდებულების საშუალებით შემოყავთ, მაშინ გამოვა, რომ ეს ის საგნებია, რომელიც დახასიათებულია დამოკიდებულებით იმ საგნებს შორის, რომელნიც დახასიათებულია... და ა. შ. უსასრულოდ. დამოკიდებულების ჰიპოსტაზირება, მისი მოწყვეტა იმ საგნებისაგან,

რომლებსაც ის შეეხება, თვით ამ დამოკიდებულებასვე შეუძლებლად გახდის. თუ მხოლოდ დამოკიდებულება გვაქვს და მეტი არაფერი, მაშინ არც დამოკიდებულება გვექნება. «ამათუიმ ნივთის თვისება, — ამბობს მარქსი, — არ შეიქმნება მის დამოკიდებულებით სხვა ნივთებთან, — არამედ მხოლოდ მჟღავნდება ასეთ დამოკიდებულებაში» [1].

როცა დამოკიდებულება მოწყვეტილია საგნებისაგან, რომლებს შორისაც მას უნდა ჰქონდეს ადგილი, მაშინ იმის ნაცვლად, რომ ვილაპარაკოთ დამოკიდებულებაზე უკანასკნელებს შორის, მოგვიხდება ლაპარაკი დამოკიდებულებაზე თვით ჰიპოსტაზირებულ სახით აღებულ დამოკიდებულებას და მის ტერმინებს შორის და ა. შ. უსასრულოდ [2].

როცა საგნის პირველად მიღება უნდათ თვით დამოკიდებულების საშუალებით, ის ძალაუნებურად ცალიერ სიმბოლოს ხასიათს ღებულობს.

რასაკვირველია, არაფერი შეუშლის ხელს იმას, რომ გამოვიყენოთ სიმბოლო და აღნიშვნა, როგორც ასეთები, მაგრამ როცა მათი საშუალებით იმ საგნების განდევნა უნდათ, რომლებსაც ისინი სწორედ უნდა აღნიშნავდნენ, მაშინ მათი ხასიათიც მახინჯდება და, საზოგადოთ, ლოგიკურად ყალბი მდგომარეობა იქმნება. «ამათუიმ ნივთის სახელწოდებას, — ამბობს მარქსი, — არაფერი საერთო აქვს მის ბუნებასთან» [3].

რამდენადაც აღებულ საგნის აღნიშვნა მის ლოგიკურ წყობაში არ შედის, არც შეიძლება ცალკე დაისვას საკითხი სიმბოლოების და აღნიშვნების გამოყენების განსაკუთრებულ უზრუნველყოფაზე ამათუიმ შემთხვევაში და ეს დაკავშირებული იყოს განსახილველი ობიექტის ხასიათთან (შესაძლებლობა — იყოს აღნიშნული არ შეიძლება მიჩნეული იყოს ამათუიმ ობიექტის განსაკუთრებულ თვისებად) და ამდენადვე არაფერს შეუძლია ხელი შეუშალოს ამათუიმ შემთხვევაში აღნიშვნების გამოყენებას. რასაკვირველია, აღებულ საგნის აღნიშვნა თითონაც გარკვეული საგანია, მაგრამ ამ საგნის მიმართაც ძალაშია ის, რომ **მისი** აღნიშვნა მის ლოგიკურ წყობაში არ შედის.

---

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. XVII, 1937, стр. 66.
[2] შეად. Bradley. Appearance and Reality, sev. impr., 1920 p. 21.
[3] К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. XVII, стр. 113.

ყალბ მდგომარეობას ქმნის არა აღნიშვნების ხმარება, მაგალითად, მათემატიკაში, არამედ სათანადო მათემატიკურ საგნებად მიჩნევა თვით მათი აღნიშვნებისა. «აღინიშნოს მხოლოდ..., — სწერს ლენინი თავის ფილოსოფიურ რვეულებში, — შენიშვნები სიმბოლოებზე, რომ მათ წინააღმდეგ საზოგადოთ არ შეიძლება რაიმე გვქონდეს. მაგრამ «ყოველგვარ სიმბოლიკის წინააღმდეგ» უნდა ითქვას, რომ ის ზოგჯერ არის «მოხერხებული ხერხი უიმისოდ იოლად წასვლისა, რომ შემოწვდნენ, მიუთითონ, გაამართლონ ცნებათა განსაზღვრები». და სწორედ ამაშია ფილოსოფიის საქმე»[1].

არ შეიძლება მეცნიერება დაყვანილი იყოს იმ ენაზე და გამოთქმის საშუალებებზე, რომლითაც ის სარგებლობს. მეცნიერების ერთგვარ გრამატიზაციის ცდას ვხვდებით მათემატიკის დაფუძნების ზოგიერთ თანამედროვე თეორიებშიაც[2]. ამ ცდებთან დაკავშირებით შეიძლება გავიხსენოთ ერთი ადგილი ლენინის «მატერიალიზმი და ემპირიოკრიტიციზმი»-დან[3], რომელშიაც გარჩეულია ის მოსაზრება, რომ მოძრაობისათვის სრულებით საჭირო არ არის მატერია ამ მოძრაობის მატარებელის სახით (შეად. ზემოთ გვ. 180), რადგან თითონ ბუნება არ არის ვალდებული დაემორჩილოს მოთხოვნილებას მოაწოდოს ქვემდებარე ყოველ შემასმენელს. ამ მოსაზრების ავტორები, თუმცა მიუთითებენ, რომ ბუნება არ არის ვალდებული დაემორჩილოს გრამატიკის ნორმებს, მაგრამ, რამდენადაც ისინი ლოგიკურად აუცილებელ საჭიროებას მოძრაობისათვის მატერიის, როგორც ამ მოძრაობის მატარებლისა, აფასებენ, როგორც განსაზღვრულს ფორმალურ გრამატიკულ დამოკიდებულებით, თითონვე ფაქტიურად ცდილობენ სწორედ დაიყვანონ ლოგიკა გრამატიკაზე. აბათილებს რა ზემოთმოყვანილ არგუმენტს, ლენინი აკეთებს მითითებას, რომელიც ასეთი სახით შეიძლება გამოითქვას: ქვემდებარე შემასმენელისათვის «მოძრაობს» ამ შემთხვევაში ფაქტიურად განდევნილი კი არ არის, არამედ მხოლოდ შეცვლილია ქვემდებარე «მატერია» ქვემდებარით «აზრი». ლენინი აშკარავებს, რომ ნამდვილად აქ უბრალოდ გრამატიკის ჩვეულებრივ ნორმებისადმი დაუმორჩილების დემონსტრაციასთან კი არ გვაქვს საქმე, არამედ გარკვეულ იდეალისტურ შეხედულების წამოყენებასთან.

---

[1] В. И. Ленин. Философские тетради, стр. 117—118.
[2] იხ. მაგ., R. Carnap. Logische Syntax der Sprache, 1934.
[3] В. И. Ленин. Сочинения, т. XIII, стр. 221.

მეცნიერება არ შეიძლება არსებობდეს საგნის გარეშე და დაყვანილ იყოს მთლად გრამატიკაზე. თითონ გრამატიკაც, თუ მას სწორედ გავიგებთ, არ არის მოკლებული სათანადო ობიექტს, და საგნობრივ ლოგიკას გვერდს ვერ აუვლის. მაგრამ, რასაკვირველია, ერთია, როცა გამოკვლევის საგნად ხდება თითონ ენა, როგორც ისტორიულად შექმნილი პროდუქტი ადამიანის მოქმედებისა, ხოლო სრულებით სხვა — როცა ამათუიმ დარგში, თუნდაც გრამატიკაში, უნდათ სიტყვით შეცვალონ ის ობიექტი, რომელიც ამ სიტყვით აღნიშნულია. ლოგიკის გრამატიზაციის ცდა ამახინჯებს თითონ გრამატიკის ხასიათს და დანიშნულებას და გამოხატავს ტენდენციას ლოგიკიდან საგნობრივობის განდევნისა.

როცა მარქსი თავის მათემატიკურ ხელნაწერებში ხმარობს ტერმინს: სიმბოლიური, მას მხედველობაში აქვს სათანადო ფორმალური და ალგორითმული მომენტები, და არა აღნიშვნისათვის რაიმე დამოუკიდებელი მნიშვნელობის მინიჭება. ფორმალური უპირატესობანი თუგინდ იმავე დიფერენციალისა შეეხება მას, როგორც მაინც ცნებას და არა აღნიშვნას. ჩვენ ზემოთ აღვნიშნეთ ფორმალისტური ხასიათი დიფერენციალური აღრიცხვის ლეიბნიცის დაფუძნებისა. ლეიბნიცის დიდი მნიშვნელობა მათემატიკის განვითარებისათვის მაინც არ ლაპარაკობს ფორმალისტურ კონცეპციის, როგორც ასეთის, სასარგებლოდ. ლეიბნიცის მიერ მიღებულ შედეგების ღირებულებას თითონ ფორმალიზმი კი არ ქმნიდა, არამედ მათი კავშირი პრაქტიკასთან, რომელიც მაინც, ფორმალიზმის მიუხედავად, ძირითად როლს თამაშობდა. სათანადო საალრიცხვო აპარატსაც ფაქტიურად გარკვეული რეალური საფუძველი ჰქონდა, რაც გამოაშკარავდა მეცნიერების შემდგომ განვითარების პროცესში. დიფერენციალური სიმბოლიკის წარმატება განსაზღვრული იყო დიფერენციალის ცნების თვით პრაქტიკით ნაკარნახებ უპირატესობებით, თუმცალი პირველ ხანებში ცნებების შინაარსის მხრივ არასაკმაოდ გამოვლინებულის, და არა ფორმალისტური მიდგომით, როგორც ასეთი (იხ. გვ. 134—135).

რასაკვირველია, ერთია — როცა ისტორიულად ჯერ ჩამოყალიბდება გარკვეული საალრიცხვო წესები და შემდეგ ეძებენ მათ სავსებით ზუსტ შინაარსობრივ დაფუძნებას — ლოგიკურად ყალბ მდგომარეობას თითონ ეს კი არ შექმნის, არამედ ის, რომ დასმულ ამოცანის პასუხი თვით ამ ამოცანის სახით ვეძებოთ და თითონ საალრიცხვო აპარატს დავავალოთ უკანა რიცხვით სათანადო საგნები

განსაზღვრის, — ხოლო მეორეა, როცა პრინციპიალურად იმ თვალსაზრისზე დგანან, რომ ამათუიმ მეცნიერებიდან შინაარსობრივობა უნდა განდევნილი იყოს, დამოკიდებულება უნდა უსწრებდეს მის ტერმინებს და სხ.. პირველ შემთხვევაში საქმე გვაქვს უბრალოდ მეცნიერული თეორიის, რომელიც, რასაკვირველია, თავიდანვე უნაკლო ვერ იქნება, განვითარების ფაქტის გამოვლენასთან (შეად. თავი I, § 1; თავი III, § 10), ხოლო მეორე შემთხვევაში — გარკვეულ ფორმალისტურ თვალსაზრისის წამოყენებასთან, რომელიც უნდა შეფასდეს, როგორც მიუღებელი.

ჩვენ ზემოთ აღვნიშნეთ ფორმალისტური ხასიათი იმ კონცეპციისა, რომელიც მიზნად ისახავს არითმეტიკის, სიმრავლეთა თეორიისა და ლოგიკის აქსიომატიზაციას. ეს არ ნიშნავს, რომ აქსიომატიური თეორია, როგორც ასეთი, ყოველთვის ფორმალისტურ უკიდურესობას მოასწავებს. აქსიომატიკა, როცა ის სწორედ გაგებულია და თავის ადგილას გამოყენებული (მაგალითად, გეომეტრიის შემთხვევაში), სრულებით არ ნიშნავს შინაარსობრივობის განდევნას და წმინდა ალგორითმულ თვალსაზრისზე დგომას. აქსიომატიკა გამოხატავს საერთო სქემას სათანადო მოდელებისათვის, რომლებთანაც ის განუყრელად დაკავშირებულია. აქსიომატიური თეორიების თავისებურება იმასთან კი არ არის დაკავშირებული, რომ მათთვის ზოგადის და ცალკეულის დამოკიდებულება რაიმე განსაკუთრებულ ხასიათს ღებულობს, აქსიომატიკის თავისებურება სხვა გარემოებებში მდგომარეობს: საქმის შესაბამის ლოგიკურ «დაწყებაში» აქსიომების სახით, სათანადო მსჯელობების აქსიომებზე დაყრდნობაში და ა. შ.. თუ აქსიომატიკურ თეორიებში «მოდელებისადმი» მიმართვა გარკვეულად განსაზღვრულია და ლოკალიზებული, ეს იმ მიზნით, რომ თეორიის შესაბამის მონაკვეთებში გარკვეული იყოს მსჯელობის ზოგადი ხაზები, და არა იმიტომ, რომ ზოგადის და ცალკეულის დამოკიდებულება აქსიომატიურ თეორიებში სხვაგვარია, ვიდრე სხვა შემთხვევებში. ზოგადის და ცალკეულის განუყრელობა სრულებით არ ნიშნავს მათ განურჩევლობას, იმას, მაგალითად, რომ შესაბამის შემთხვევებში არ შეიძლება დაისვას საკითხები სპეციალურად ზოგადის შესახებ.

აქსიომატიური სქემები, ამგვარად, შეეხებიან თავის მოდელებს და მათთან განუყრელია. ეს არ ნიშნავს, რასაკვირველია, რომ ზოგადის ყოველი გამოკვლევა აქსიომატიურ ხასიათს ღებულობს. აქსიომატიურ თეორიის თავისებურება იმასში კი არ მდგომარეობს, რომ

მხოლოდ ის განიხილავს ზოგადს და ამასთანავე ეს ზოგადი მასთან ვითომდაც არის გამოყოფილი და გაწმენდილი ცალკეულისაგან (პირიქით, აქსიომატიური სქემები, განუყრელია თავის მოდელებთან, როგორც ყოველი ზოგადი თავის ცალკეულებთან), აქსიომატიური თეორიის თავისებურებანი, როგორც აღნიშნულია ზემოთ, დაკავშირებული არიან სხვა გარემოებებთან. მოდელებს უნდა უყუროთ არა როგორც დროებით და დამხმარე რამეს, რაც საჭიროა მხოლოდ აქსიომატიურ სქემის «არაწინააღმდეგობრივობის» დამტკიცებისათვის და ამის შემდეგ მას თავისაგან ხელუხლებლად მაინც ტოვებს, მოდელების საშუალებით დემონსტრირებულია სათანადო ზოგადის მოცემულობა აქსიომატიური სქემის სახით.

აქსიომატიურ თეორიებს ისე არ უნდა უყუროთ, ვითომდაც აქ საგნები უკანა რიცხვით განსაზღვრულია თითონ მათ შორის დამოკიდებულებათა საფუძველზე. აქსიომატიური სქემის ერთგვარი «განუზღვრელობა» შეეხება როგორც საგნებს, ისე მათ შორის დამოკიდებულებას, და იმასთან დაკავშირებულია, რომ აქ გვაქვს საერთო სქემა, რომელიც სხვადასხვა მოდელების სახით შეიძლება რეალიზებული იყოს, რომლებშიაც კონკრეტიზირებული იქნება როგორც საგნები, ისე მათ შორის დამოკიდებულებანი. თუ გარკვეულ ობიექტის განსაზღვრისას, თუნდაც რაიმე აქსიომატიკურ თეორიაში, მონაწილეობენ ესათუის დამოკიდებულებანი, აქ ლაპარაკია მაინც ამ ობიექტის ცნების ფორმირებაზე და ეს ობიექტი ვერ იქნება წარმოებული მ ი ს ი დამოკიდებულებების საშუალებით.

ამათუიმ აქსიომატიური თეორიის აგება გულისხმობს შინაარსობრივი ლოგიკის გამოყენებას, კერძოთ ისეთი ელემენტარული ცნებებით სარგებლობას, როგორც არის სიმრავლის და ნატურალური რიცხვის ცნებები. სწორედ, ამასთან დაკავშირებით, ლოგიკურად ყალბი მდგომარეობა იქმნება, როცა მიზნად ისახავენ არითმეტიკის, სიმრავლეთა თეორიის და თითონ ლოგიკის აქსიომატიზაციას, რითაც მახინჯდება თვით აქსიომატიური თეორიის დანიშნულება.

შეიძლება ლაპარაკი ამათუიმ აქსიომატიურ თეორიაზე მათემატიკის ფარგლებში, და არა თვით მათემატიკის, როგორც მთელის, აქსიომატიზაციაზე. როცა უნდათ მთლიანად ლოგიკის და მათემატიკის აქსიომატიზაცია, საქმე იმგვარ ხასიათს ღებულობს, რომ ცდილობენ ლოგიკა დააყრდნონ გარკვეულ ფორმალურ ხასიათის დასაწყისზე და ეს მოასწავებს მიდრეკილებას მეცნიერებიდან შინა-

არსობრივობის განდევნის და მისი დაყვანის ცალიერ სიმბოლოების თამაშზე.

რასაკვირველია, თითონ ცდებში ლოგიკის, სიმრავლეთა თეორიის და არითმეტიკის აქსიომატიზაციისა ძალაუნებურად უხდებათ შინაარსობრივი ლოგიკით სარგებლობა. ეს სწორედ ადასტურებს ამგვარი ცდების ლოგიკურად ყალბ ხასიათს და საგნობრივი ლოგიკის ობიექტურად აუცდენლობას. საქმეს ვერ უშველის ის, რომ ლოგიკის და მათემატიკის სათანადო ელემენტებს, რომელნიც გამოყენებულია ლოგიკის და არითმეტიკის აქსიომატიზაციის დროს, უკავშირებენ მეტალოგიკას და მეტამათემატიკას[1]. ეს წარმოადგენს მხოლოდ სიძნელის შენიღბვის და «მოშინაურების» ცდას, ცდას «გაჭირების სიკეთედ გადაქცევისა», და ამით მხოლოდ კვლავ დასტურდება სიძნელის არსებობის ფაქტი.

რეგრესი უსასრულობაში, რომელსაც იწვევს ლოგიკის და არითმეტიკის აქსიომატიზაციის ცდა, არ შეიძლება გააბათილო შეჩერების სურვილით. ერთი ფილოსოფოსის მიერ გამოყენებულ შედარების პერიფრაზირება რომ მოვახდინოთ, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ რეგრესი უსასრულობაში ეტლი არაა, რომელიც შეგიძლია იქ გააჩერო, სადაც გინდა. მეტალოგიკის და მეტამათემატიკისადმი მიმართვა არ ცვლის ლოგიკის და არითმეტიკის აქსიომატიზაციის ცდების ფორმალისტურ ხასიათს. აქ მჟღავნდება მხოლოდ ობიექტურად არსებული სიძნელეები, რომლებსაც ფორმალიზმი წააწყდება და საგნობრივი ლოგიკის ობიექტური აუცდენლობა.

მეტამათემატიკისადმი მიმართვაში თავს იჩენს მიდრეკილება ფილოსოფიური კვლევა-ძიება მათემატიკის საფუძვლებთან დაკავშირებით შეცვლილი იყოს მათემატიკის დაფუძნებით იმავე მათემატიკაზე და ამ მიდრეკილების განუხორციელებელი და ლოგიკურად ყალბი ხასიათი. ფილოსოფიის «მათემატიზაციის» ცდა თვით მათემატიკის ხასიათსაც ამახინჯებს[2].

მარქსის თვალსაზრისი მათემატიკის დაფუძნების შესახებ დიდ დახმარებას გაგვიწევს მათემატიკის დაფუძნების თანამედროვე თეორიების შეფასების საქმეში და, კერძოთ, თანამედროვე ფორმალისტური კონცეპციების კრიტიკის დროს.

---

[1] თანამედროვე მეტალოგიკურ თეორიების შესახებ იხ. მაგ., A. P. Ushenko. The Problems of Logic, 1941.

[2] საკითხი, რომელსაც აქ ვეხებით, დაწვრილებით განხილულია ხემოთმოხსენებულ ჩვენს შრომაში ლოგიკის აქსიომატიზაციის პრობლემის შესახებ.

მარქსის მათემატიკურ ხელნაწერების გაცნობის შემდეგ საკმაოდ ნათელი უნდა იყოს, რომ მათი მნიშვნელობა მარტო იმაში კი არ მდგომარეობს, რომ ისინი ადასტურებენ და ამართლებენ მათემატიკური ანალიზის თანამედროვე დაფუძნებას, რომელამდის მეცნიერება მივიდა ხანგრძლივი განვითარების შედეგად. მარქსის მათემატიკურ კონცეპციას აქტუალური მნიშვნელობა აქვს მათემატიკის დაფუძნების თანამედროვე თეორიების განხილვის დროს და თანამედროვე მათემატიკის დაფუძნების საქმის მოგვარებისათვის.

ჩვენ უკვე აღნიშნული გვქონდა ზემოთ, თუ რა მნიშვნელობა აქვს მარქსის მათემატიკურ ხელნაწერებს სიმრავლეთა თეორიის საფუძვლების დადგენისათვის, რაც ძირითად როლს თამაშობს თანამედროვე მათემატიკის დაფუძნების საქმეში.

მარქსის მიერ წამოყენებული სხვაობის თვალსაზრისი, რომელსაც ის მანამდე გაბატონებულ ჯამის თვალსაზრისს უპირისპირებს, უნივერსალური მნიშვნელობის მქონეა და იძლევა გარკვეულ ერთიან პრინციპს მთელი მათემატიკის დაფუძნებისათვის, რომელიც ერთნაირად გამოდგება როგორც მათემატიკური ანალიზის, ისე სიმრავლეთა თეორიის საფუძვლების დადგენის საქმეში.

მარქსის მათემატიკურ კონცეპციას სახელმძღვანელო მნიშვნელობა უნდა ჰქონდეს მათემატიკის ხასიათის გარკვევის საქმეში, მათემატიკის რაობასთან და აგებულებასთან დაკავშირებულ მთელ რიგ ძირითად საკითხების გადაწყვეტისათვის: მათემატიკის დიალექტიკური ბუნების გამოვლენა, მათემატიკის კავშირი პრაქტიკასთან, ფორმალური მხარის მნიშვნელობა მათემატიკაში, მათემატიკური ცნებების და თეორიების ლოგიკური ხასიათი, ისტორიულის და ლოგიკურის დამოკიდებულება მათემატიკაში, არსებობის, ზოგადის და ცალკეულის, სასრულის და უსასრულოს პრობლემები მათემატიკაში და სხვა.

საკითხები, მაგალითად, უსასრულობის შესახებ მათემატიკაში, მათემატიკის ფორმალურ მხარის შესახებ და სხვა, დღეს, მართალია, უფრო ზოგად პრობლემატიკას უკავშირდება, ვიდრე მაშინ, როცა ისინი, უმთავრესად, განხილული იყვნენ მათემატიკური ანალიზის დაფუძნების ასპექტში, მაგრამ მარქსის კონცეპცია მათემატიკურ ანალიზის დაფუძნებისა იძლევა მტკიცე ფილოსოფიურ დასაყრდენს დასახელებულ საკითხების გაფართოებულ ჩარჩოებში კვლევა-ძიებისათვის.

თვით მათემატიკის დაფუძნების თეორიების ხასიათის და ამოცანების დადგენისათვის მარქსის მათემატიკურ ნაწერებს განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვთ.

ჩვენს შრომაში გარჩეული იყო მათემატიკის დაფუძნების ზოგიერთი საკითხი, მარქსის მათემატიკურ ხელნაწერების განხილვასთან დაკავშირებით. ჩვენ არ გვქონდა და ვერც გვექნებოდა პრეტენზია სრული დახასიათება მოგვეცა მარქსის მათემატიკურ ხელნაწერების. ეს ხელნაწერი, როგორც თავშივე აღნიშნული გვქონდა, არ ეკუთვნის იმგვარ ნაშრომთა რიცხვს, რომელთა მნიშვნელობის გარკვევისათვის საკმარისია ერთი ან თუნდაც რამდენიმე გამოკვლევა. მარქსის შრომები მათემატიკის და მის დაფუძნების შესახებ ყოველთვის იქნება მათემატიკოსების მხედველობის არეში და თავის შუქით მათთვის სწორი ორიენტაციის მიმცემი.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

კარლ მარქსი

მათემატიკური ხელნაწერები

ლ. გოკიელი

კარლ მარქსის მათემატიკური ხელნაწერები და მათემატიკის დაფუძნების პრობლემები

X. უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დაფუძნების თანამედროვე მდგომარეობა

XI. უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დაფუძნების განვითარების ეტაპები

XII. მარქსის კონცეპცია მათემატიკის დაფუძნებისა

ფასი 6 მ. 20 კ.
ყდა — 80 კ.
7 მან.

К. МАРКС

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РУКОПИСИ

(На грузинском языке)

Госиздат Груз. ССР
Сектор политической литературы
Тбилиси 1948

კ. მარქსი

მათემატიკური ხელნაწერები

სახელგამი
პოლიტლიტერატურის სექტორი
1948